

**ADVERTIMENT.** La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

**ADVERTENCIA.** La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR ([www.tesisenred.net](http://www.tesisenred.net)) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

**WARNING.** On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX ([www.tesisenxarxa.net](http://www.tesisenxarxa.net)) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author



**Universitat Politècnica de Catalunya  
BARCELONA TECH**

**Departament de Resistència de  
Materials i Estructures a l'Enginyeria**

---

**Un nuevo método para la simulación numérica de  
problemas de partición de dominios.**

Ph.D Thesis

Por:

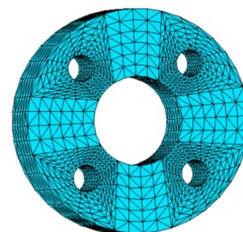
Mailhyn E. Cafiero Díaz

Supervisores:

Prof. Xavier Oliver Olivella

Dr. Juan Carlos Cante Terán

Barcelona, 2014



*Insistir, persistir y nunca desistir...*

*A Dios, por acompañarnos siempre en todo momento.*

*A mis hijos, por ser mi motor, mi fuerza, mis ganas de ser mejor cada día, sin  
ustedes alcanzarlo no hubiese sido posible.*

*A Iván, mi compañero de vida y de retos, mi equipo, este logro es nuestro.*

*A mis padres y hermanos, mi aliento, mi bastón, mi apoyo incondicional, ese  
“No te rindas hija” que llega siempre en el momento más indicado.*

*A mi vieja Flora, mi lucero de la mañana. A mis nonnos, que brillan desde el  
cielo.*

*A mis suegros, familia y amigos por todo el cariño y por ponerme siempre en  
sus oraciones.*



# Agradecimientos

Quisiera expresar mis agradecimientos a todas aquellas personas y entidades que hicieron posible la consecución de esta tesis.

Primeramente, quisiera agradecer al Ministerio de Economía y Competitividad, al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) y a la Universidad Politécnica de Catalunya por la beca FPI otorgada para el desarrollo de esta investigación.

Al Profesor Xavier Oliver por darme la oportunidad de ser su doctoranda y por haberme permitido demostrar que con tesón, a veces hasta lo que parece imposible se puede lograr. Por haber depositado su confianza en mí, por todos los conocimientos y sabiduría aportados, por enseñarme a ser una persona más fuerte, muchísimas gracias.

Al Profesor Juan Carlos Cante Terán por ser más que mi cotutor, mi gran amigo, por ser siempre esa persona que se preocupaba más allá del ámbito profesional, por el apoyo, por las tantas sesiones de psicología y sobre todo, por la paciencia, por todas las horas de dedicación, los conocimientos y consejos. Dios te regaló el don de la enseñanza, muchísimas gracias.

A los Doctores Joaquín Hernández Ortega y Rafael Weyler por todos sus conocimientos aportados, por sus enseñanzas y por formar parte de todo este proceso. A los profesores del departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería (RMEE). A la sede de Terrassa de la Universidad Politécnica de Catalunya por haberme acogido en sus instalaciones. A Rosa, por ser siempre una persona tan amable, eficiente y dispuesta desde el inicio de esta gran aventura. Al departamento de informática por la ayuda brindada.

Al profesor Miguel Cerrolaza y René Meziat, por haberme recomendado al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

A mis compañeros de fatigas y andanzas, los grandes amigos que me dejó el doctorado, Maritzabel, César, Diego y Jeannette, gracias por todo lo compartido, por apoyarme siempre, por las risas y los llantos, por la amistad que me brindaron y que estoy segura, no acabará aquí. A todos mis compis que siempre tuvieron un consejo o una ayuda, esos compis de aventuras, de comidas, de pasillo, de cafés: Joaquín, Manu, Pablo, Andrés, Ivo, Elvira, Mabel, Jairo, Carlos, Cuauhtemoc, Juan Carlos, Giorgio, Sonia, Nubia, Juan Manuel, a los compis de Terrassa por todas sus ocurrencias, a todos, muchas gracias.

A mi familia, Iván, Amelie y Stefano, mi equipo, mi fuerza, mis ganas de luchar y de ser mejor cada día, los amo. A mis padres, por haberme enseñado a no rendirme nunca, a luchar siempre hasta el final, a terminar lo que comenzamos, gracias papitos valió la pena llegar hasta aquí, los amo. A mis hermanitos Stephanie y Joel, no se imaginan lo importantes que son para mí, los amo, y a los hermanos que me regaló la vida: Eliana, Juan, Rossmery, Zuly, Marivi, Saúl y Leida, mi vida no sería la misma y no estaría completa sin ustedes. A mi familia en Venezuela y en Italia, lejos en distancia, pero nunca en afectos y oraciones. A mis amigos de toda una vida y a todos los que he hecho durante esta gran aventura en Barcelona, a todos, mil gracias.

A mí amado país Venezuela, que me formó y preparó para afrontarme a este gran reto personal y profesional. A Dios, mi guía y mi fuerza, gracias por permitirme estar aquí, te Amo.

# Resumen

Este trabajo de investigación tiene como objetivo principal, desarrollar, implementar y validar una técnica de transferencia de información, en los métodos de descomposición de dominios, capaz de abordar problemas termomecánicos acoplados con formulaciones mixtas desplazamiento-presión.

En las técnicas de partición de dominios, una vez dividido un dominio en un número finito de subdominios, la discretización de cada uno de los componentes internos o subdominios, se lleva a cabo mediante técnicas conocidas, en este caso, mediante la técnica de los Elementos Finitos, con lo cual, el problema se centra en la correcta transferencia de información a través de la interfaz de contacto entre las particiones.

En la mayoría de los métodos alternativos de descomposición de dominios, la interfaz entre subdominios se genera mediante la creación de un marco de partición. En este trabajo por el contrario, se propone la generación de una malla de interfaz, de espesor nulo entre fronteras, por degeneración de una triangulación de Delaunay. Esta forma tan sencilla de generar la interfaz le confiere al método, además de precisión y robustez, versatilidad, ya que las mallas de los subdominios pueden ser arbitrariamente no coincidentes en sus fronteras, con lo cual, no se está supeditado a utilizar la misma discretización en cada una de las particiones, ni el mismo tipo de elementos en cada subdominio.

Al particionar un dominio en subdominios, se pueden generar los denominados subdominios flotantes, que son aquellos que carecen de las condiciones de contorno suficientes para eliminar los movimientos de sólido rígido. Para poder llevar a cabo simulaciones numéricas con la presencia de

subdominios flotantes, en este trabajo se propone una técnica innovadora, de bajo coste computacional y mínimamente invasiva a nivel de implementación, que permite calcular de forma robusta la pseudoinversa del subdominio flotante.

Se demuestra, que la técnica propuesta, a diferencia de algunos métodos alternativos, pasa el “patch test” de forma satisfactoria, aun y cuando existen subdominios flotantes y mallas no coincidentes. Adicionalmente, se ha demostrado a partir de análisis de convergencia y medidas del error, que los resultados obtenidos mediante el método propuesto, son comparables, a nivel de precisión y velocidad de convergencia, con métodos alternativos que incorporan un marco de partición entre subdominios y que incluso, puede presentar ventajas notables a nivel de precisión, al ser comparada con el método de mortero de malla burda.

Tomando en cuenta que la conexión entre subdominios se lleva a cabo mediante la incorporación de multiplicadores de Lagrange sobre la interfaz, para llevar a cabo simulaciones mixtas desplazamiento-presión, se ha incorporado el multiplicador de Lagrange de las presiones ( $\lambda_p$ ) y sus respectivas ecuaciones de trabajo y restricciones sobre la interfaz. Mediante un test de validación, estudios de convergencia y medidas del error, se ha demostrado que la incorporación de este parámetro es fundamental a nivel de precisión, para llevar a cabo una correcta transferencia de la variable presión a través de la interfaz.

De la misma manera, para poder abordar simulaciones numéricas de problemas termomecánicos acoplados, se ha incorporado el multiplicador de Lagrange de la temperatura ( $\lambda_\theta$ ) y sus respectivas ecuaciones de trabajo y restricciones sobre la interfaz, demostrándose, mediante un test de validación, que incluso en problemas de conformado de metales en donde el material sufre altos niveles de deformación plástica, la técnica propuesta de partición de dominios consigue obtener resultados comparables en robustez y precisión con simulaciones numéricas monolíticas.

Con el fin de utilizar el método propuesto en el contexto del cálculo en paralelo, se ha implementado la técnica, tal que, cada subdominio pueda ser procesado independientemente. Es por esta razón que se ha utilizado el

método de las subestructuras para el cálculo de las variables (desplazamiento, presión y temperatura).

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción y antecedentes.....</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación .....	1
1.2	Antecedentes de diversos métodos de subdominios .....	3
1.2.1	Métodos sin solapamiento de tipo no conforme funcional .....	5
1.2.2	Método de Mortero .....	6
1.2.3	Método de Descomposición de dominios Dual .....	11
1.2.4	Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados (LLM) ..	13
1.2.5	Métodos FETI “ <i>Finite Element Tearing and Interconnecting</i> ” .....	20
1.3	Antecedentes en el cálculo de las Pseudoinversas .....	28
1.3.1	Cálculo de las matrices de flexibilidad “ <i>free-free</i> ” .....	28
1.3.2	Cálculo de los modos de sólido rígido y de la Pseudoinversa en los métodos FETI.....	30
1.4	Contenido de la Tesis.....	32
<b>2</b>	<b>El Método de Subdominio de Interfaz (MSI) .....</b>	<b>35</b>
2.1	Antecedentes: Método del dominio de contacto .....	35
2.2	Descripción del Método Propuesto .....	36
2.2.1	Aspectos generales.....	36
2.2.2	Aspectos geométricos .....	42
2.3	Descripción del problema .....	51
2.3.1	Forma fuerte del problema.....	51

2.3.2	Forma débil del problema.....	52
2.3.3	Linealización del sistema.....	54
2.3.4	Método de la estabilización consistente.....	57
2.4	Resolución del sistema mediante el método de las subestructuras .....	60
2.5	Eliminación de los movimientos de sólido rígido.....	64
2.5.1	Método de estabilización (consistente) por la interfaz .....	65
2.6	Validación del método .....	69
2.6.1	Patch test.....	69
2.6.2	Viga en Cantilever .....	75
2.6.3	Análisis de convergencia .....	81
2.7	Consideraciones Finales.....	90

### **3 Aplicación a formulaciones mixtas desplazamiento – presión...91**

3.1	Formulación mixta para la resolución de problemas incompresibles ..	91
3.1.1	Descripción del problema monolítico.....	91
3.1.2	Estabilización vía el método PPP .....	93
3.2	Formulación mixta para la resolución de problemas incompresibles dentro del método de partición de dominios.....	95
3.2.1	Incorporación del multiplicador de Lagrange para la transferencia de las presiones .....	95
3.2.2	Definición del gap de las presiones .....	96
3.2.3	Descripción del problema .....	97
3.2.4	Resolución del sistema mediante el método de las subestructuras	104
3.3	Validación del método .....	108
3.3.1	Análisis de convergencia, problema de la membrana de Cook ....	108
3.4	Consideraciones finales .....	120

<b>4 Aplicación al problema másico de conformado .....</b>	<b>121</b>
4.1 Modelo termomecánico acoplado .....	121
4.1.1 Descripción del problema .....	121
4.1.2 Modelo constitutivo .....	123
4.2 Problema termomecánico, particionado en subdominios.....	129
4.2.1 Incorporación del multiplicador de Lagrange para la transferencia de la temperatura.....	129
4.2.2 Definición del gap térmico.....	131
4.2.3 Descripción del problema particionado en subdominios .....	132
4.2.4 Validación del método .....	142
4.2.5 Consideraciones finales .....	149
 <b>5 Conclusiones y líneas futuras de investigación .....</b>	<b>151</b>
5.1 Resumen del método propuesto.....	151
5.2 Conclusiones.....	152
5.3 Aportaciones .....	154
5.4 Líneas Futuras de Investigación .....	155
 <b>Bibliografía .....</b>	<b>157</b>



# 1 Introducción y antecedentes

## 1.1 Motivación

La partición de un dominio en un número finito de subdominios, constituye hoy en día un campo de interés en el desarrollo de diversas simulaciones numéricas. Existen tres motivaciones claras para la separación de todo un dominio en varios subdominios. La primera de ellas se encuentra orientada a la resolución de problemas de tipo multi – física, modalidades como las de ingeniería civil, petróleo, fluidos, entre otras, han aumentado la demanda de algoritmos y programas computacionales que con gran precisión y eficiencia, modelen comportamientos físicos distintos, como por ejemplo, la interacción fluido-estructura.

La segunda motivación, surge como una respuesta a la necesidad de acople de esquemas disímiles de discretización, como es el caso de geometrías complejas que ameritan un refinamiento muy alto de la malla en zonas con singularidades muy fuertes, como es el caso del “*driven cavity problem*” (ver Figura 1.1), que requiere un mayor número de elementos en las esquinas por las singularidades que allí se presentan, permitiendo resolver el problema global de una forma más barata (Bernardi, y otros, 1993).

La tercera motivación y no por ello la menos importante, se desprende de la necesidad del cálculo en paralelo en simulaciones que poseen un gran número de elementos. El cómputo en paralelo opera sobre el principio de dividir los problemas grandes, en unos más pequeños que serán resueltos de manera simultánea. Esta técnica, admite el uso de metodologías completamente diferentes en cada una de las partes, permitiendo aumentar de esta manera la potencia de los ordenadores.

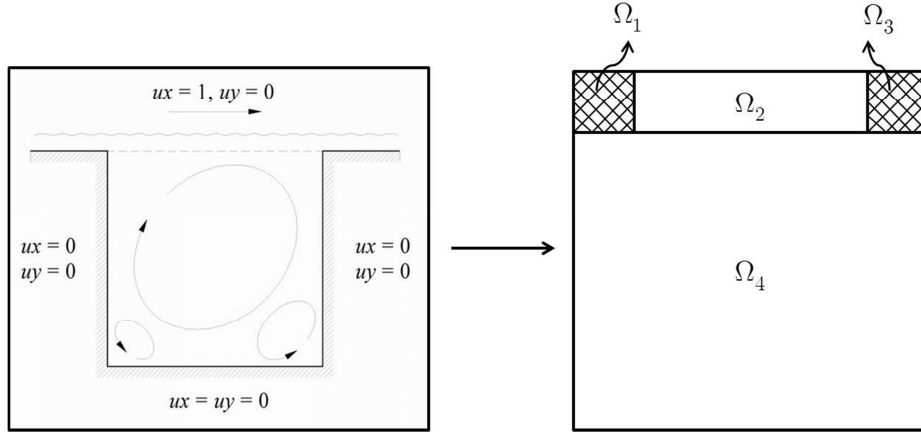


Figura 1.1: “Driven cavity problem”, con mallas más refinadas en las esquinas (Bernardi, y otros, 1993).

En este trabajo se estudia una clase específica de descomposición de dominios. El término partición en este caso, identifica el proceso de separación espacial de un continuo, en componentes que interactúan entre si denominados particiones (Park, et al., 2000).

Los análisis llevados a cabo mediante descomposición de dominios estipulan que la discretización de los componentes individuales a través de métodos estándares como los elementos finitos, diferencias finitas o los elementos de contorno, son bastante conocidas; con lo cual, el problema se reduce al modelado de la interacción entre estos componentes (Park, et al., 2000) de aquí se deriva la eficiencia del método, en la adecuada transmisión de información entre los subdominios a través de sus fronteras, en el denominado problema de contacto en las fronteras.

En este trabajo, se propone el método de la interfaz de contacto como una particularización del denominado “*contact-domain method*”, para problemas de contacto friccional entre cuerpos (Oliver, y otros, 2009). Esta técnica propuesta, se fundamenta en la generación de una malla de interfaz, de espesor nulo entre fronteras, por degeneración de una triangulación de Delaunay entre los subdominios. Esta forma tan simple de generar la malla, le ofrece una gran ventaja al método frente a otros alternativos.

Un elemento adicional del método propuesto, que surge como una solución a las carencias de otras técnicas, corresponde a que las mallas de los subdominios pueden ser arbitrariamente no-coincidentes en sus fronteras, con lo cual, no se está supeditado a utilizar la misma discretización en cada una de las particiones.

El término de “*subdominios flotantes*” se utiliza en este trabajo para denotar todas aquellas particiones que carecen de restricciones suficientes para evitar los movimientos de sólido rígido. El tratamiento con el cual se suprimen estos movimientos, se realiza mediante una estrategia específica propuesta, de bajo coste computacional, permitiendo un cálculo robusto de la matriz inversa de dicho subdominio flotante.

Por otra parte, ante la necesidad actual de la industria en simular problemas termomecánicos de conformado de metales, el método ofrece la capacidad de extenderse sin dificultad a formulaciones mixtas desplazamiento-presión, como las que se requieren para el tratamiento de problemas incompresibles, así como también, al estudio de problemas termomecánicos acoplados.

## 1.2 Antecedentes de diversos métodos de subdominios

Las primeras técnicas de descomposición de dominios se derivan del algoritmo de Schwarz y se fundamentan en la descomposición de un dominio  $\Omega$  en una familia de dominios solapados (ver Figura 1.2). El algoritmo de Schwarz es un procedimiento iterativo en donde se resuelve el problema original sobre uno de los dominios o familias, a partir de las condiciones de contorno resueltas previamente sobre la otra familia (Bernardi, y otros, 1993).

De esta manera, la solución de los dominios solapados, tal y como se muestra en la Figura 1.2-(a) y (b), se lleva a cabo resolviendo primeramente la restricción de la zona  $\partial\Omega_2$  contenida en  $\Omega_1$ , para luego utilizar esta respuesta, como condición de contorno para la familia  $\Omega_2$  (Schwarz, 1972).

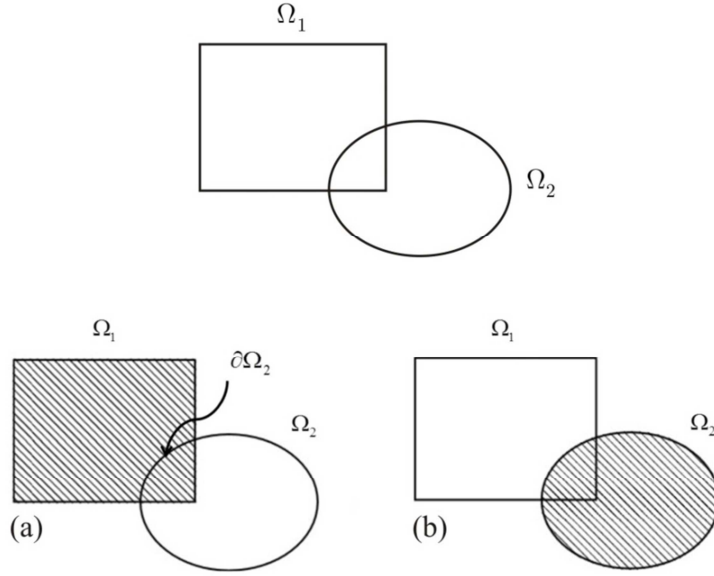


Figura 1.2: Solución de los dominios solapados  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ : (a) Solución de la restricción  $\partial\Omega_2$ , (b) Solución de la familia  $\Omega_2$ .

Sin embargo, debido a lo costosas que pueden ser estas técnicas, actualmente se prefiere utilizar métodos sin solapamiento que tienden a ser computacionalmente más baratos.

Los algoritmos sin solapamiento se basan en descomponer un dominio  $\Omega$  en  $K$  subdominios,  $\Omega_k$ , con frontera  $\bar{\Omega}_k$ , tal que cumplan las siguientes condiciones:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k \quad \text{y} \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad (1.1)$$

$$\gamma_{kl} = \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_l \quad (1.2)$$

Con:  $1 \leq k \leq l \leq K$ .

En la literatura, se pueden encontrar diversos algoritmos sin solapamiento, sin embargo, el desarrollo de esta tesis se centrará en los métodos sin solapamiento de tipo no conforme funcional. Para profundizar

sobre la clasificación mostrada en la Figura 1.3 se recomienda ir a (Bernardi, y otros, 1993).

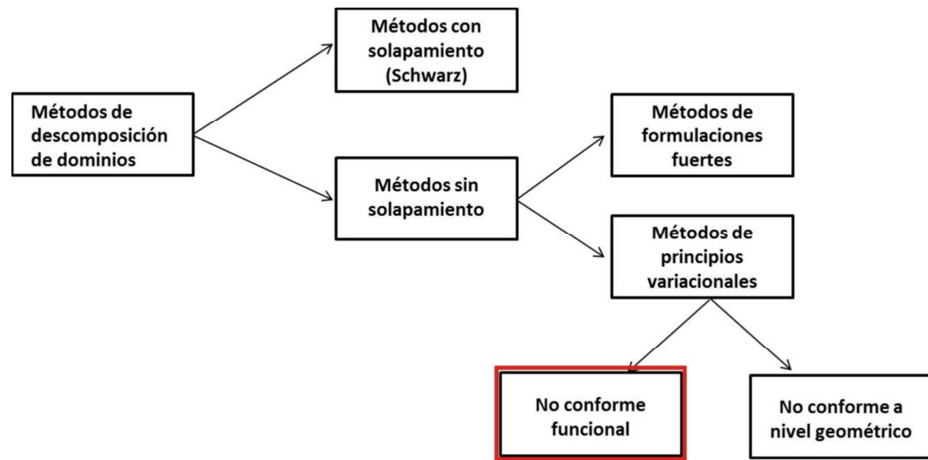


Figura 1.3: Clasificación de las técnicas de descomposición de dominios (Bernardi, y otros, 1993)

### 1.2.1 Métodos sin solapamiento de tipo no conforme funcional

Suponga el problema de Poisson formulado sobre un dominio rectangular  $\Omega$  particionado en un par de subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  como los que se ilustran en la Figura 1.4 a continuación:

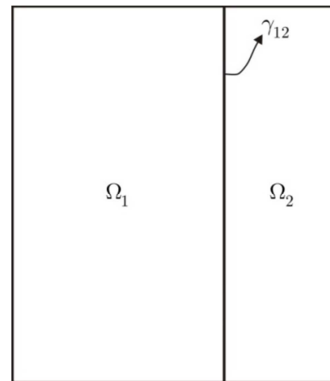


Figura 1.4: Dominio rectangular  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Partiendo de una determinada función  $f \in L^2(\Omega)$  descrita como:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

El método de descomposición de dominios consiste en ubicar las variables escalares  $(u_1, u_2)$  tal que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f|_{\Omega_1} & \text{en } \Omega_1 \\ u_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \\ -\Delta u_2 = f|_{\Omega_2} & \text{en } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

La técnica de descomposición de dominios, basada en el método de los principios variacionales, debe buscar adicionalmente la solución  $(u_1, u_2)$  tal que satisfaga la relación (1.5) que corresponde a la condición de conformidad sobre la interfaz (mallas coincidentes):

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } \gamma_{12} \quad (1.5)$$

Sin embargo, como una respuesta a la necesidad de aumentar la flexibilidad de las discretizaciones de los subdominios, aparecen los métodos sin solapamiento de tipo “*no conforme funcional*” en los que la condición (1.5) deja de cumplirse exactamente (mallas no coincidentes). Es en este tipo de métodos, en los que se centrará el desarrollo de esta tesis.

A continuación, se explicarán algunos métodos utilizados en la actualidad, para la resolución de problemas de descomposición de dominios con mallas no coincidentes y que se fundamentan por llevar a cabo el enlace entre subdominios, a partir de la introducción del campo de los multiplicadores de Lagrange (Zienkiewicz, y otros, 2000).

### 1.2.2 Método de Mortero

El método de mortero es una de las técnicas más conocidas en la solución de problemas de subdominios disconformes en la interfaz y/o con mallas no coincidentes; y se caracteriza por el acoplamiento entre subdominios a través del uso de los multiplicadores de Lagrange.

Partiendo de un dominio  $\Omega$ , este método distingue a los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , denotando a sus respectivas superficies de la interfaz, como superficies “*mortar*” y “*non-mortar*” (ver Figura 1.5). Estas denotaciones se pueden llevar a cabo de manera arbitraria, sin embargo, son necesarias para el desarrollo de la formulación (Popp, y otros, 2009).

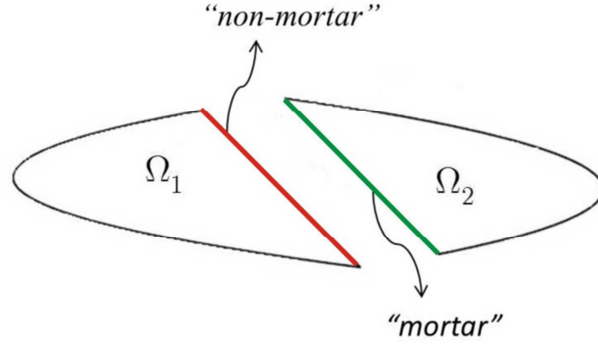


Figura 1.5: Definición de las superficies “*mortar*” y “*non-mortar*” (Zienkiewicz, y otros, 2000).

### 1.2.2.1 Forma débil del método

Una vez definidos los subdominios como “*mortar*” y “*non-mortar*” se calcula la energía potencial total, en términos del trabajo interno y externo realizado por cada uno de los subdominios y del aporte realizado por los multiplicadores de Lagrange sobre la interfaz. La solución de este problema vendrá dada por la localización de los extremos de la función potencial  $P_{total}$  haciendo  $\delta P_{total} = 0$ .

$$P_{total} = (P^{nm} + P^m)_{\text{int}} + (P^{nm} + P^m)_{\text{ext}} + P_{Nc}^{LM} \quad (1.6)$$

Con:

$$\begin{aligned} P_{Nc}^{LM} &= \int_{\gamma} \lambda_N g_N da \\ \delta P_{Nc}^{LM} &= \int_{\gamma} \delta \lambda_N g_N da + \int_{\gamma} \lambda_N g_N \delta da + \int_{\gamma} \lambda_N \delta g_N da \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde:

$nm$  = Subdominio con superficie “*non-mortar*”.

$m$  = Subdominio con superficie “*mortar*”.

$\text{int}$  = Energía Potencial interna.

$\text{ext}$  = Energía Potencial externa.

$P_{N_c}^{LM}$  = Trabajo hecho por los multiplicadores de Lagrange ( $LM$ ) sobre una interfaz no conforme ( $N_c$ ).

$\lambda_N$  = Multiplicador de Lagrange proyectado sobre el vector normal a la superficie “*mortar*”.

$g_N$  = Medida de la penetración o “*gap*” proyectado sobre el vector normal a la superficie “*mortar*” ( $\bar{\mathbf{n}}^m$ ) y que viene dada por la expresión:

$$g_N := (x^{nm} - x^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (1.8)$$

En la forma débil (1.7), se observa que la energía potencial  $P_{N_c}^{LM}$  debe ser evaluada sobre la interfaz  $\gamma$ , sin embargo, al hablar de mallas no conformes en donde  $\gamma^{nm} \neq \gamma^m$ , para una única definición de la superficie de interfaz, el método de mortero propone escoger una de las superficies (“*mortar*” o “*non-mortar*”) como superficie común.

En una gran cantidad de trabajos (Fischer, y otros, 2005) (Popp, y otros, 2009) entre otros, la superficie “*non-mortar*” suele ser seleccionada como superficie común  $\gamma^{nm} := \gamma$ .

Siendo así, al ser la malla de la superficie “*non-mortar*” utilizada para discretizar la interfaz  $\gamma$ , también lo será para definir el campo de los multiplicadores de Lagrange (ver Figura 1.6).

**Observación 1.1** Nótese que aunque esta selección se lleva a cabo de forma arbitraria y que aunque estudios anteriores confirman que cualquiera de las dos discretizaciones arrojan valores del error comparables con valores de referencia, la formulación se encuentra sujeta a limitaciones impuestas por la estabilidad y consistencia del “*patch test*”, debido a la selección de un número apropiado de variables  $\lambda_N$  (Zienkiewicz, y otros, 2000).



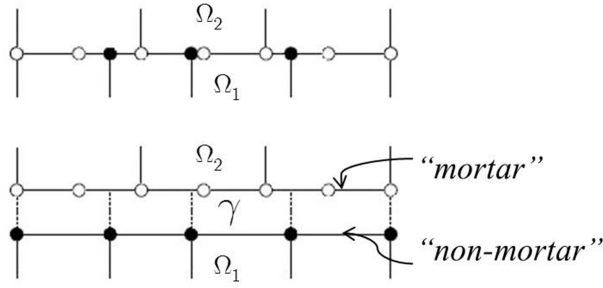


Figura 1.6: Discretización de la interfaz  $\gamma$  y del campo de los multiplicadores de Lagrange a partir de la discretización de la superficie “*mortar*” (Zienkiewicz, y otros, 2000).

### 1.2.2.2 Discretización por Elementos Finitos

Conociendo que el método de mortero se fundamenta en el uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange para incluir la restricción de contacto entre cuerpos o subdominios, se aplica un enfoque mixto en el que las funciones de forma para cada una de las variables  $(\mathbf{u}, \lambda_N)$ , tienen que ser elegidas de forma tal, que cumplan con las condiciones Babuska-Brezzi.

Dentro de la aproximación por el método de los elementos finitos, si la interfaz es discretizada mediante elementos finitos lineales (ver apartado 1.2.2.3), las discretizaciones que se obtienen para los desplazamientos  $\mathbf{u}^{nm}$ , las coordenadas  $\mathbf{X}^{nm}$  y los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_N$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e^{nm}(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_i^{nm} N_i^{nm}(\xi) \\ \lambda_{N_e}(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \lambda_{N_i} \phi_i^{nm}(\xi) \\ \mathbf{X}_e^{nm}(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{X}_i^{nm} N_i^{nm}(\xi) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Note que las coordenadas en la configuración actual, se consiguen a partir de  $\mathbf{x}_e^{nm} = \mathbf{X}_e^{nm} + \mathbf{u}_e^{nm}$ . Por otra parte, sobre la superficie “*mortar*”, sólo serán interpolados los desplazamientos  $\mathbf{u}^m$  y las coordenadas  $\mathbf{X}^m$  donde  $\mathbf{x}_e^m = \mathbf{X}_e^m + \mathbf{u}_e^m$ , siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e^m(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_i^m N_i^m(\xi) \\ \mathbf{x}_e^m(\xi) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{x}_i^m N_i^m(\xi) \end{aligned} \quad (1.10)$$

### 1.2.2.3 Segmentación y descripción de los elementos de mortero

Dentro de la aproximación del método de mortero, la forma débil presentada en (1.7) es discretizada mediante la introducción de segmentos, éstos, se definen como el espacio geométrico ubicado entre dos nodos sobre la superficie “*non-mortar*” (ver Figura 1.7).

En el caso bidimensional (2D), se utiliza una integración numérica mediante puntos de Gauss, en donde para cada punto de Gauss ubicado dentro de un segmento, la medida del gap ( $g_N$ ) vista en (1.8) es calculada mediante la proyección de los desplazamientos a través del vector normal ( $\bar{\mathbf{n}}^m$ ) sobre la superficie “*mortar*”.

En general, es posible que cada vector de posición  $\mathbf{x}^{nm}$  pueda ser proyectado dentro de un segmento de la superficie “*mortar*”. En la Figura 1.7 se presenta dicha proyección para una integración realizada mediante 3 puntos de Gauss en cada segmento de superficie “*non-mortar*”.

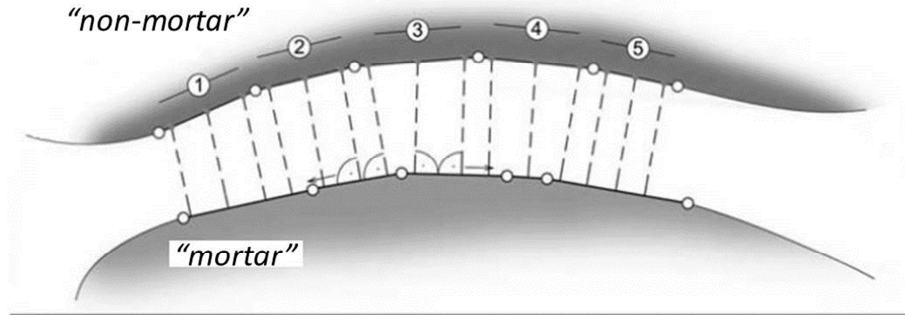


Figura 1.7: Definición de segmentos sobre la superficie “*non-mortar*” (Fischer, y otros, 2005).

### 1.2.3 Método de Descomposición de dominios Dual

Este método fue propuesto por (Herry, y otros, 2002) y al igual que el de mortero, está dedicado al tratamiento de la interacción entre subdominios con mallas no conformes en la interfaz.

En esta técnica, para la construcción de la interfaz, se debe garantizar que en un problema 2D al menos dos nodos sean comunes y que en uno 3D, al menos tres lo sean.

La interfaz en un problema 2D está constituida por tres superficies, las dos primeras pertenecientes a la de cada subdominio con sus respectivos grados de libertad ( $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$ ) y la tercera, a la de los multiplicadores de Lagrange ( $\gamma$ ) cuya discretización es la esencia del método (ver Figura 1.8).

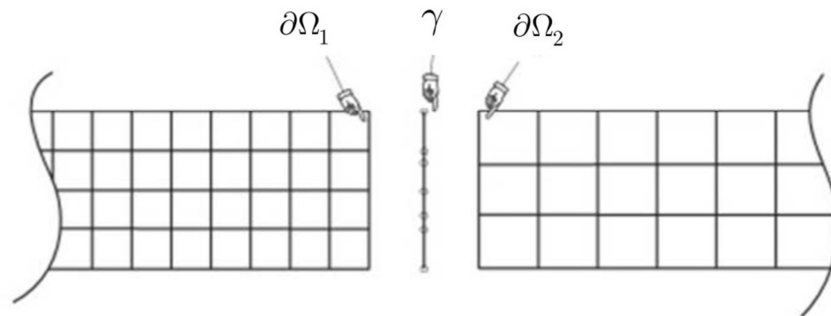


Figura 1.8: Definición de la interfaz (Herry, y otros, 2002).

Estas superficies se tratarán por separado y se definirá para cada una de ellas una discretización de elementos finitos independiente, con su número de grados de libertad y sus funciones de forma asociadas. De esta manera, el caso de mallas no coincidentes, se tratará como un problema libre al que se le adicionan restricciones en la interfaz entre subdominios, introduciendo tantos multiplicadores de Lagrange como restricciones existan.

Adicionalmente, para la generación de la interfaz se toman en cuenta los siguientes aspectos:

- La dimensión de la geometría de la interfaz siempre será igual a la dimensión del problema menos uno.
- Se asumirá que los subdominios continuos y su representación discretizada poseen la misma geometría.

- Las tres superficies tendrán la misma geometría pero pueden estar discretizadas de maneras diferentes.

Conociendo que el factor clave en el estudio de mallas no coincidentes recae sobre la discretización de la superficie de los multiplicadores de Lagrange, el método que se utiliza para cumplir con la continuidad cinemática del subdominio y para escoger el número de nodos sobre la interfaz ( $N_\lambda$ ), con sus correspondientes funciones de forma, es el siguiente:

1. Se escogen los nodos comunes entre la interfaz  $N_C$ , siendo  $N_{\partial\Omega_1}$  y  $N_{\partial\Omega_2}$  el número de nodos de los contornos  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$  respectivamente.

$$N_C = N_{\partial\Omega_1} \cap N_{\partial\Omega_2} \quad (1.11)$$

2. El número de nodos ( $N_\lambda$ ) en la interfaz ( $\gamma$ ) vendrá dado según (Simo, y otros, 1985) por:

$$N_\lambda = (N_{\partial\Omega_1} + N_{\partial\Omega_2}) - N_C \quad (1.12)$$

En la Figura 1.9 se puede observar, sobre una superficie 2D de una forma más explícita, el proceso de obtención del número de nodos sobre la interfaz a partir de las ecuaciones (1.11) y (1.12).

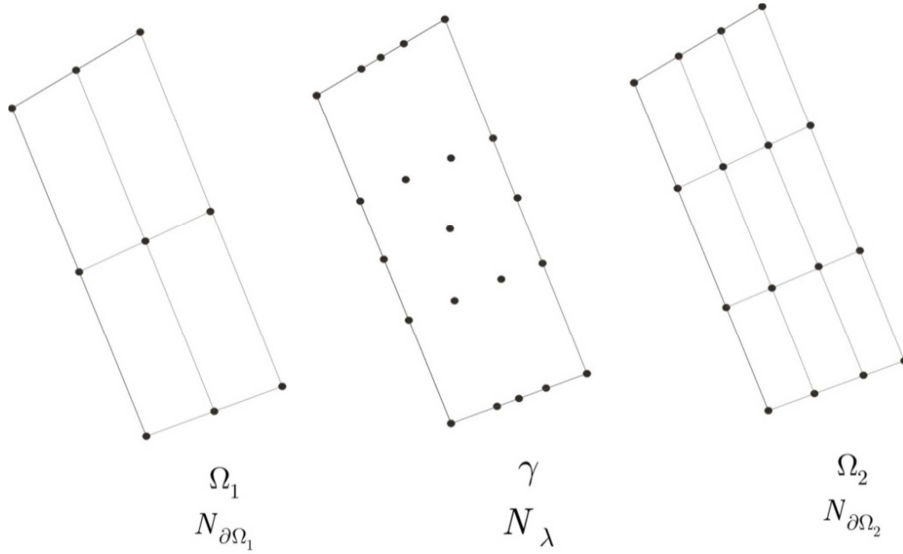


Figura 1.9: Selección de los nodos  $N_\lambda$  sobre la interfaz  $\gamma$  (Herry, y otros, 2002).

De esta manera, recordando que el método de mortero consiste en discretizar la superficie de la interfaz como la copia de una de las superficies de los subdominios, en este método cuando las mallas son coincidentes, la discretización de la interfaz es exactamente la misma que para el método de mortero y cuando el mallado es de tipo Jerárquico, en donde la malla fina se obtiene subdividiendo la malla gruesa, el método de mortero con los multiplicadores de Lagrange ubicados sobre la malla más fina y este método, son equivalentes.

### 1.2.4 Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados (LLM)

Este método, trata el problema de la partición de dominios fundamentándose en la teoría de Lagrange: “Todos los cuerpos son enteramente libres” por lo cual, el principio de los trabajos virtuales se consigue sumando las contribuciones independientes de estos cuerpos.

Los ingredientes del método LLM para el caso presentado en la Figura 1.10 son los siguientes (Park, y otros, 2002):

- El dominio  $\Omega$  posee un contorno  $\partial\Omega$  y en este caso se encuentra particionado en tres subdominios  $\Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_3$  (ver Figura 1.10 (a)).
- Los subdominios  $\Omega_S$  son considerados entidades aisladas con sus propios campos de desplazamientos  $\mathbf{u}_S$ , deformaciones  $\mathbf{e}_S$ , tensiones  $\boldsymbol{\sigma}_S$  y fuerzas prescritas  $\bar{\mathbf{f}}_S$ .
- El contorno entre subdominios  $\gamma$  es denominado marco de partición y sus desplazamientos podrán variar independientemente de cómo varíen los de los subdominios  $\Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_3$ .
- El marco de partición  $\gamma$  se encuentra pegado a los subdominios adyacentes por medio del campo de los multiplicadores de Lagrange, como se muestra en la Figura 1.10 (b).
- Se dice que estos  $\boldsymbol{\lambda}_S$  son localizados, porque se encuentran asociados a sus respectivos subdominios y juegan el rol de tracciones superficiales (ver Figura 1.11).

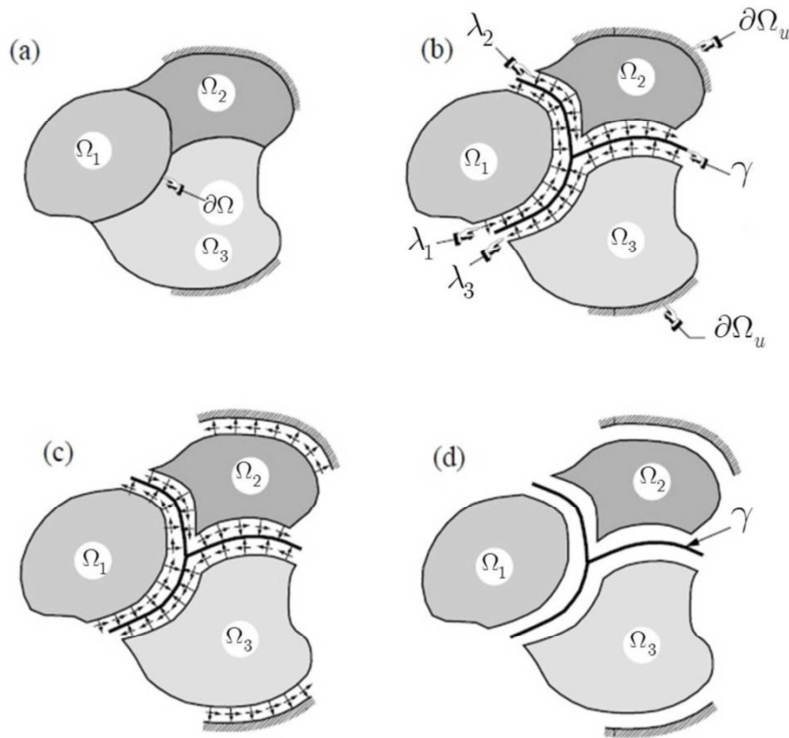


Figura 1.10: Tratamiento de la interfaz para la construcción del funcional de energía potencial (Park, y otros, 2002).

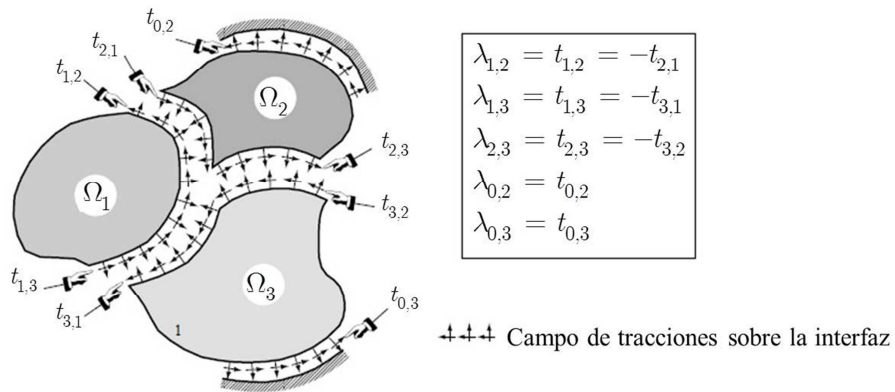


Figura 1.11: Definición del campo de las tracciones sobre la interfaz (Park, et al., 2000).

### 1.2.4.1 Forma débil del método

Este método utiliza el funcional de energía potencial de (Atluri, 1975) modificado debido a la adición de la interfaz. Este funcional incluye los desplazamientos independientes  $\mathbf{u}_\lambda$ , unidos de forma débil a través de los multiplicadores de Lagrange localizados  $\lambda_s$ ; y puede ser presentado de la siguiente manera (1.13) y (1.14):

$$P_{PEM} = P_{PE} - P_{\mathbf{u}_\lambda} = \sum_S P_{PE}^S - \sum_S P_{\mathbf{u}_\lambda}^S \quad (1.13)$$

Donde:

$$P_{\mathbf{u}_\lambda}^S = \int_{\partial\Omega_\lambda^S \cup \partial\Omega_u^S} \lambda_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_\lambda) dA \quad (1.14)$$

La solución de este problema vendrá dada por la localización de los extremos de la función potencial  $P_{PEM}$  haciendo  $\delta P_{PEM} = 0$ .

$$\delta P_{\mathbf{u}_\lambda}^S = - \int_{\partial\Omega_\lambda^S \cup \partial\Omega_u^S} \lambda_s \delta \mathbf{u}_\lambda dA \quad (1.15)$$

En donde:

$P_{PEM}$  = Funcional de energía potencial total, modificado.

$P_{PE}^S$  = Energía potencial interna y externa de cada uno de los subdominios.

$P_{\mathbf{u}_\lambda}^S$  = Energía potencial para cada una de las interfaces.

$\mathbf{u}_s$  = Campo de los desplazamientos de cada subdominio.

$\mathbf{u}_\lambda$  = Campo de los desplazamientos sobre el marco de partición  $\gamma$ .

$\partial\Omega_\lambda^S$  = Superficie de cada uno de los subdominios que forma parte del marco de partición  $\gamma$ .

$\partial\Omega_u^S$  = Superficie de cada uno de los subdominios en donde se aplican desplazamientos prescritos.

### 1.2.4.2 Discretización por Elementos Finitos

Para llevar a cabo la colocación de los nodos sobre el marco de partición, se partirá de un dominio  $\Omega$  subdividido en los subdominios

$\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal y como se observa en la Figura 1.12. Siendo los tres factores que influyen en la discretización de la interfaz los siguientes (Park, y otros, 2002):

- La interpolación de los multiplicadores de Lagrange localizados  $\lambda_l^1$  y  $\lambda_l^2$ .
- La interpolación del campo de los desplazamientos  $\mathbf{u}_\lambda$ .
- La preservación del estado tensional constante cuando se conectan los subdominios. Este último paso se conoce como la prueba de la parcela sobre la interfaz o “*patch test*”.

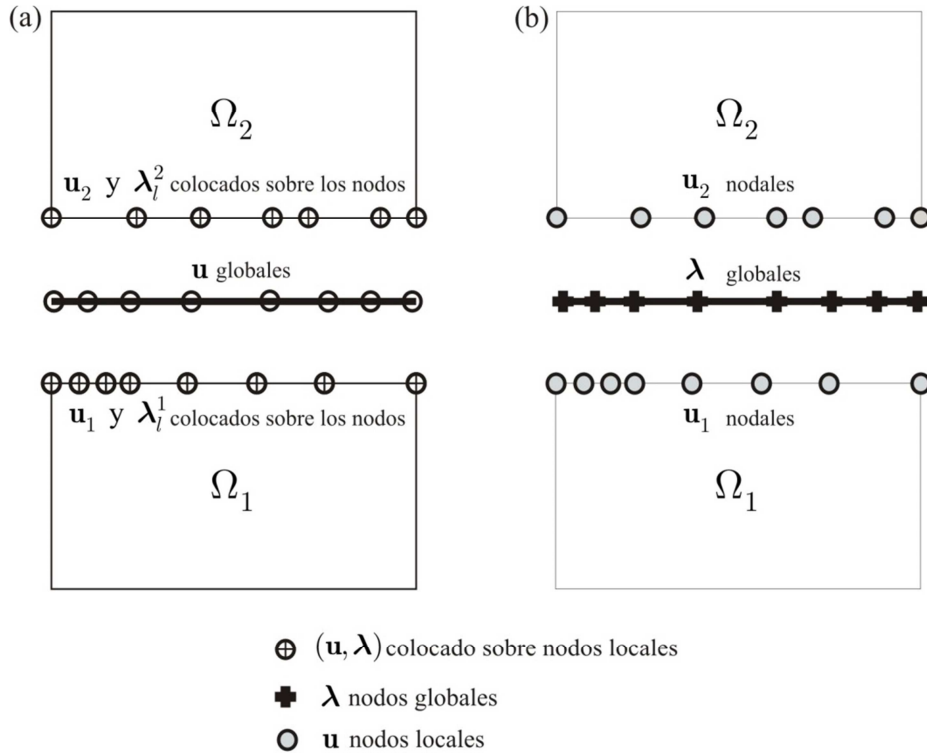


Figura 1.12: Esquema de conexión para una malla de interfaz no coincidente: (a) campo de los desplazamientos y los multiplicadores de Lagrange locales, (b) conexión mediante los multiplicadores de Lagrange globales (Park, y otros, 2002).



Interpolación de las fuerzas de la interfaz localizadas

En los trabajos de (Park, y otros, 1998) y (Park, et al., 2000) se demuestra que los multiplicadores de Lagrange locales  $\lambda_l^1$  y  $\lambda_l^2$  actúan como fuerzas nodales físicas, cuando se encuentran localizados sobre los nodos que conforman el contorno de los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  (ver Figura 1.12 (a)).

Esta propiedad, se preserva haciendo que los multiplicadores de Lagrange se conviertan en fuerzas puntuales, concentradas, en los nodos que coinciden con el campo de los desplazamientos del contorno de cada subdominio (cruces y círculos Figura 1.12 (a)) y puede ser expresado de forma simbólica mediante la siguiente expresión (Park, y otros, 2002):

$$\lambda_l^k = \sum_{j=1}^{N^k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \lambda_l^k(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, 2$$

con :

$$\lambda(\mathbf{x}_m) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) = \begin{cases} \lambda(\mathbf{x}_m) & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{x}_m \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (1.16)$$

Preservación de un estado tensional constante a través de las fuerzas de la interfaz

Como prerequisite para la determinación de la ubicación de los nodos sobre el marco de partición, es necesario determinar las fuerzas nodales sobre la interfaz, asociadas a un estado tensional constante  $\sigma_C$ .

Supóngase una capa de elementos cualquiera, dispuesta a lo largo de la interfaz de cada uno de los subdominios particionados (Figura 1.13).

Considerando un elemento típico ( $e$ ), a partir de la matriz  $\mathbf{B}_\varepsilon$  que corresponde a la matriz de las derivadas de las funciones de forma, la contribución del elemento a las fuerzas nodales asociadas al estado tensional constante  $\sigma_C$  viene dado por:

$$\mathbf{f}^{(e)} = V^{(e)} [\mathbf{B}_\varepsilon]^T \sigma_C \quad (1.17)$$

En donde  $V^{(e)}$  corresponde al volumen, área o longitud del elemento dependiendo de las dimensiones del problema.

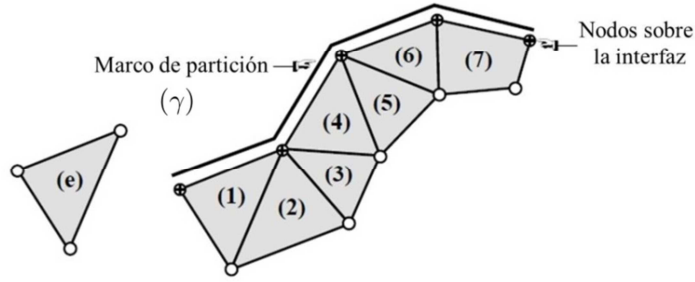


Figura 1.13: Cálculo elemento por elemento de las fuerzas nodales asociadas a un estado tensional constante.

Una vez que  $\mathbf{f}^{(e)}$  ha sido calculada para el total de elementos sobre la interfaz ( $N_{elem}$ ), el vector de fuerzas nodales será calculado como:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \left[ (\mathbf{f}^{(1)})^T \quad (\mathbf{f}^{(2)})^T \quad \dots \quad (\mathbf{f}^{(N_{elem})})^T \right]^T \\ \mathbf{f}_\lambda &= \mathbf{A}^T \mathbf{f} \\ \lambda_i(\sigma_c) &= \mathbf{L}^T \mathbf{f}_\lambda\end{aligned}\tag{1.18}$$

Siendo  $\mathbf{A}$  la matriz de ensamblaje que asigna las contribuciones elementales en el vector de fuerzas nodales sobre la frontera y  $\mathbf{L}$  la matriz Booleana que extrae los grados de libertad de los nodos sobre la interfaz (Park, y otros, 2002).

#### Disposición de los nodos sobre el marco de partición

Considere las fuerzas nodales  $\lambda_l^1$  y  $\lambda_l^2$  mostradas en la Figura 1.14-

(a) que satisfacen el estado tensional constante  $\sigma_c$  sobre cada una de las particiones, cuando estas fuerzas se disponen sobre el marco de partición como se muestra en la Figura 1.14-(b), el marco  $\gamma$ , considerado como un cuerpo libre, debe satisfacer la condición de equilibrio sobre la interfaz.

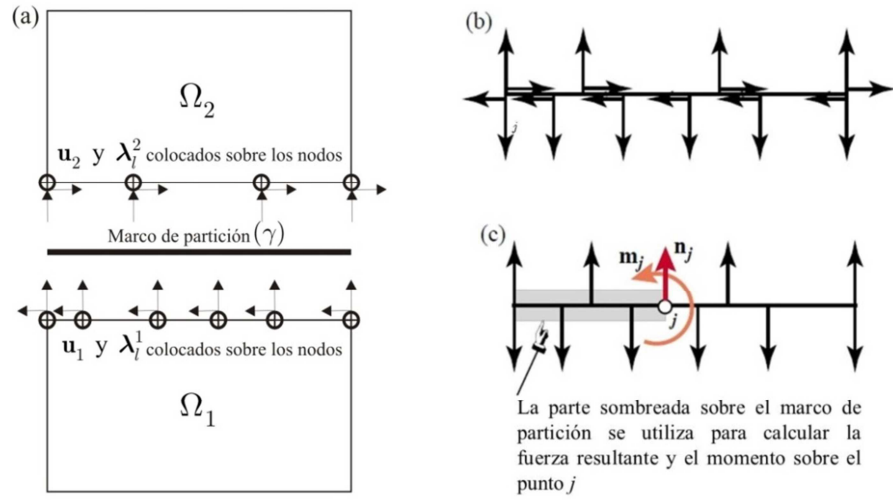


Figura 1.14: Procedimiento para el cálculo de las coordenadas nodales sobre el marco de partición: (a) Fuerzas nodales sobre las interfaces, (b) fuerzas proyectadas sobre el marco de partición, (c) fuerza resultante y momento actuando sobre el marco de partición en el punto  $j$ .

Si se restringen las fuerzas de la interfaz a aquellas que satisfacen dicho estado tensional constante y si éstas, están en equilibrio a lo largo del marco de partición, se concluye que el estado de tensión constante en los dos subdominios se conserva (Park, y otros, 2002). Esta observación será explotada en el desarrollo del criterio de disposición de los nodos sobre el marco de partición. Definiendo:

$$\lambda_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_j \\ \mathbf{m}_j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{\lambda_j} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{xj} \\ \mathbf{u}_{\theta j} \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Considerando las fuerzas y momentos resultantes  $(\mathbf{n}_j, \mathbf{m}_j)$ , el método consiste en realizar un barrido sobre todo el marco de partición con la finalidad de hallar las coordenadas  $\mathbf{x}_j = \{x_j, y_j, z_j\}$  de los  $M$  nodos sobre la interfaz (Figura 1.14-(c)), tal que los desplazamientos  $\mathbf{u}_{xj}$  y  $\mathbf{u}_{\theta j}$

construyan un sistema linealmente independiente. Este requisito dará lugar a una disposición única de los nodos sobre el marco de partición.

**Observación 1.2** Nótese que los desplazamientos  $\mathbf{u}_{\lambda_j}$  causados por las fuerzas y momentos que actúan a lo largo del marco de partición, como constituyen un sistema linealmente independiente al ser dispuestos sobre  $(\gamma)$ , no dan lugar a cambios en la energía de deformación. Esto puede ser escrito como:

$$\delta P_{\mathbf{u}_\lambda}^S = \sum_{j=1}^M \mathbf{n}_j^T \delta \mathbf{u}_{xj} + \sum_{j=1}^M \mathbf{m}_j^T \delta \mathbf{u}_{\theta j} = 0 \quad (1.20)$$

### 1.2.5 Métodos FETI “*Finite Element Tearing and Interconnecting*”

Este método fue introducido por (Farhat, y otros, 1991) y se encuentra ubicado dentro del análisis numérico como una técnica para la resolución de problemas de descomposición de dominios no solapados y dentro del campo del análisis estructural, como el método de las subestructuras basado en los Gradientes Conjugados GC.

Los métodos de partición de dominios no solapados como el de mortero, DDD o LLM, una vez que han generado la interfaz y definido las ecuaciones de equilibrio, pueden resolver el problema discreto resultante, mediante la técnica FETI con preconditionadores (Stefanica, 1999).

Para explicar el método considere un dominio  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . En (Farhat, y otros, 1991) se demuestra que la generalización a un número arbitrario de subdominios es directa.

Un problema genérico de partición de dominios, consiste en: dada una cierta  $f$  y  $h$ , encontrar el campo de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  tal que correspondan al punto estacionario del siguiente funcional de energía:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, f) - (\mathbf{u}, h)_{\partial\Omega} \quad (1.21)$$

Dónde:

$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) =$  Forma bilineal de la energía potencial interna.

$[(\mathbf{u}, f) + (\mathbf{u}, h)_{\partial\Omega}] =$  Energía potencial externa.

Si  $\Omega$  se divide en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , resolver el problema presentado en (1.21) consiste en encontrar los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  que corresponden a los puntos estacionarios de los funcionales de energía:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{u}_1) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}_1, f)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}_1, h)_{\partial\Omega_1} \\ J_2(\mathbf{u}_2) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)_{\Omega_2} - (\mathbf{u}_2, f)_{\Omega_2} - (\mathbf{u}_2, h)_{\partial\Omega_2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Y que satisfagan adicionalmente la condición de continuidad sobre la superficie de la interfaz  $\gamma$ :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \gamma \quad (1.23)$$

Resolver los problemas variacionales presentados en (1.22) que cumplan con la condición de continuidad (1.23) es equivalente a encontrar el punto de silla del potencial:

$$J^*(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \lambda) = J_1(\mathbf{u}_1) + J_2(\mathbf{u}_2) + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \lambda)_\gamma \quad (1.24)$$

Dónde:

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \lambda)_\gamma = \int_\gamma \lambda(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) d\gamma \quad (1.25)$$

Escribiendo el campo de los desplazamientos  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  mediante sus respectivas funciones de forma:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}_1 \text{ y } \mathbf{u}_2 = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}_2 \quad (1.26)$$

el principio variacional (1.24) puede ser escrito matricialmente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1^T \lambda \\ \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{f}_2 + \mathbf{B}_2^T \lambda \\ \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Donde  $\mathbf{K}_j, \hat{\mathbf{u}}_j$  y  $\mathbf{f}_j$ , con  $j = 1, 2$  son respectivamente la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos y el vector de fuerzas prescritas asociados al subdominio  $\Omega_j$ . El vector de los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  representa las fuerzas de interacción entre los dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  a lo largo de la interfaz o superficie común  $\gamma$  y  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  corresponden a las matrices simbólicas Booleanas que conectan la malla de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  sobre la interfaz.

De esta manera, si  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$  son matrices no singulares, el sistema de ecuaciones (1.27) se puede escribir de la siguiente manera:

$$(\mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{B}_2^T) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_1 \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{K}_1^{-1} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1^T \boldsymbol{\lambda}) \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{K}_2^{-1} (\mathbf{f}_2 + \mathbf{B}_2^T \boldsymbol{\lambda}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Y su solución, se obtendrá mediante la resolución de los multiplicadores de Lagrange en (1.28) para luego sustituir éstos, en (1.29) y obtener el campo de los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}_1$  y  $\hat{\mathbf{u}}_2$ .

Para un número arbitrario de subdominios  $\Omega_j$ , el método consiste en mallar cada uno de estos subdominios de manera independiente y posteriormente para cada una de estas mallas se construye sus respectivas matrices de rigidez, vectores de fuerzas prescritas y las matrices Booleanas que conectan los subdominios vecinos  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$  ( $\mathbf{K}_j$ ,  $\mathbf{f}_j$  y  $\mathbf{B}_j^k$ ).

Si  $a_j$  y  $N_s$  denotan el número de subdominios  $\Omega_k$  que son adyacentes a  $\Omega_j$  y el número total de subdominios respectivamente, el sistema matricial a resolver se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_j \hat{\mathbf{u}}_j &= \mathbf{f}_j + \sum_{k=1}^{k=a_j} \mathbf{B}_j^{k^T} \lambda \\ \mathbf{B}_j^k \hat{\mathbf{u}}_j &= \mathbf{B}_k^j \hat{\mathbf{u}}_k \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 1.2.5.1 Manejo de singularidades

En muchos problemas de partición de dominios, no todas las matrices de los subdominios son *no singulares*, lo cual se puede traducir como la existencia de subdominios que carecen de las condiciones de contorno suficientes como para suprimir los movimientos de sólido rígido.

A esta clase de subdominios se les denomina “*subdominios flotantes*”. En estos casos, el proceso descrito anteriormente se descompone, para armar una estrategia computacional especial que maneja estas singularidades locales.

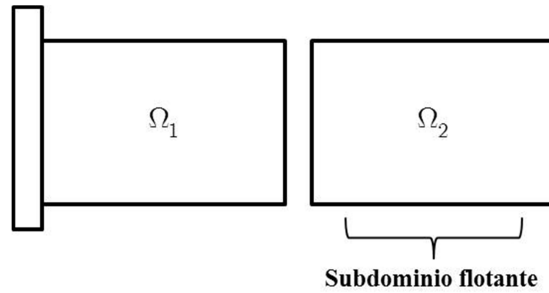


Figura 1.15: Descomposición de una viga en voladizo con subdominio flotante.

Una vez más, para la explicación de esta estrategia nos concentraremos en el caso de dos subdominios ya que la extrapolación para el caso  $N_S > 2$  es directa. Suponiendo que  $\Omega$  corresponde a una viga en cantilever y que  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son las particiones verticales resultantes como se muestra en (Figura 1.15).

En este caso en particular,  $\mathbf{K}_1$  es definida positiva y  $\mathbf{K}_2$  es semi-definida positiva debido a que no hay ninguna condición de contorno especificada sobre  $\Omega_2$ . Es por esta razón, que la segunda ecuación de (1.29)

requiere un tratamiento especial, se debe conseguir la pseudoinversa de la matriz denominada  $\mathbf{K}_2^+$  tal que, cumpla la condición  $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_2^+\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2$ . De esta manera, la nueva solución para los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}_2$  (1.29) vendrá dada por:

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{K}_2^+(\mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2^T\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\alpha} \quad (1.31)$$

Donde  $\mathbf{R}_2$  es una matriz rectangular cuyas columnas forman la base del espacio nulo de  $\mathbf{K}_2$ , lo que físicamente representa los modos de sólido rígido de  $\Omega_2$  y  $\boldsymbol{\alpha}$  un vector que especifica su combinación lineal. Sustituyendo (1.31) en (1.28) y (1.29) se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_2^+\mathbf{B}_2^T)\boldsymbol{\lambda} = & -\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{f}_1 \\ & +\mathbf{B}_2(\mathbf{K}_2^+\mathbf{f}_2 + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{K}_1^{-1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1^T\boldsymbol{\lambda}) \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{K}_2^+(\mathbf{f}_2 + \mathbf{B}_2^T\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{R}_2\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (1.33)$$

El sistema (1.32) y (1.33) es indeterminado, ya que tanto  $\boldsymbol{\alpha}$  como  $\boldsymbol{\lambda}$  necesitan ser determinados antes del campo de los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}_1$  y  $\hat{\mathbf{u}}_2$ , pero hasta este momento, sólo tres ecuaciones se encuentran disponibles. Debido a que  $\mathbf{K}_2$  es una matriz simétrica, la ecuación singular  $\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2^T\boldsymbol{\lambda}$  admite al menos una solución, si y solo si, el lado derecho de la igualdad  $(\mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2^T\boldsymbol{\lambda})$  no tiene componentes en el espacio nulo de  $\mathbf{K}_2$ , esta condición puede ser expresada como:

$$\mathbf{R}_2^T(\mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_2^T\boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (1.34)$$

La anterior condición de ortogonalidad proporciona la ecuación que falta para la solución completa del sistema (1.32) y (1.33). De esta manera, combinando (1.32), (1.33) y (1.34) después de algunas manipulaciones algebraicas, el nuevo sistema a resolver se puede escribir como:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_I & \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2 \\ (\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^+ \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{R}_2^T \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{K}_1^{-1}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{B}_1^T \lambda) \\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{K}_2^+(\mathbf{f}_2 + \mathbf{B}_2^T \lambda) + \mathbf{R}_2 \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_I = \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^+ \mathbf{B}_2^T \quad (1.36)$$

Debido a que  $\mathbf{F}_I$  es simétrica definida positiva, y  $(\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2)^T$  es una matriz llena, el sistema matricial de ecuaciones para la obtención de  $(\lambda, \alpha)$  es simétrico y no singular y admite una única solución.

### 1.2.5.2 Algoritmo del Gradiente Conjugado proyectado y preconditionado

En este punto, nos enfocaremos en la solución del sistema de ecuaciones no singular:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_I & \mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2 \\ (\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^+ \mathbf{f}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_1 \\ -\mathbf{R}_2^T \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

Conociendo la expresión para  $\mathbf{F}_I$  en (1.36), se busca un algoritmo de resolución eficiente que no requiera ni el ensamble, ni el cálculo explícito de  $\mathbf{F}_I$  y de su inversa  $\mathbf{F}_I^{-1}$ . Luego de diferentes análisis (Farhat, y otros, 1991) se demostró que un método eficiente para resolver (1.37) es el de los Gradientes Conjugados (CG).

Con el fin de introducir un algoritmo de solución iterativo para la solución de los multiplicadores de Lagrange, se debe notar que resolver el sistema (1.37) es equivalente a resolver el siguiente problema de minimización:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T \mathbf{F}_I \lambda + (\mathbf{B}_1 \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{f}_1 - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_2^+ \mathbf{f}_2)^T \lambda \quad (1.38)$$

Sujeto a la siguiente restricción:

$$(\mathbf{B}_2 \mathbf{R}_2)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{f}_2 \quad (1.39)$$

Así, partiendo de  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$  este algoritmo convergerá si y solo si, la condición (1.39) es satisfecha en cada iteración, ver (Farhat, y otros, 1991).

### 1.2.5.3 Precondicionador en el problema de la interfaz

La convergencia del método de los Gradientes Conjugados Proyectados (CPG), puede ser mejorada a través del uso de un precondicionador, ya que el problema por si sólo se encuentra mal condicionado.

La incorporación de un precondicionador consiste en encontrar una aproximación de la inversa de  $\mathbf{F}_I$  escrita como  $\mathbf{P}_I^{-1}$ . Entre los objetivos de encontrar una aproximación de la inversa de  $\mathbf{F}_I$  se pueden mencionar:

- Mejorar la convergencia del método.
- Evitar el ensamble explícito de la matriz  $\mathbf{F}_I$  y de su inversa.
- Proveer al método de una estrategia muy beneficiosa para la paralelización.

**Observación 1.3** la diferencia entre los métodos iterativos y los métodos directos para el cálculo de los  $\boldsymbol{\lambda}$ , es que los directos aunque funcionan mejor, tienden a ser muy costosos en el ámbito computacional, sin embargo, aunque los iterativos son más baratos, se encuentran mal condicionados.

Es importante señalar, que incluso bajo la presencia de subdominios flotantes, sólo  $\mathbf{F}_I$  necesita del uso de un precondicionador, no la matriz global.

Los usuarios del método FETI, han desarrollado una amplia gama de precondicionadores y sus diferentes usos dependen del problema que desea resolverse. Por ejemplo, el primer precondicionador que propuso (Farhat, y otros, 1991) dio lugar a los métodos FETI de nivel 1 y fue implementado como:

$$\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{K}_1^I + \mathbf{K}_2^I \quad (1.40)$$

En donde  $\mathbf{K}_1^I$  y  $\mathbf{K}_2^I$  corresponde a las trazas de  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$  sobre la interfaz  $\gamma$ . Al escoger este preconditionador el sistema era barato, fácil de resolver y perfectamente paralelizable, sin embargo, este preconditionador presentaba inconsistencias físicas al ser utilizado en dominios particionados con puntos de cruz (ver Figura 1.16).

Ciertas modificaciones sobre dicho preconditionador nacieron como una solución para la correcta resolución de problemas con puntos de cruz homogéneos. Al referirnos al término homogéneo, hablamos de aquellos problemas en los que todos los subdominios poseen similares materiales, geometrías o propiedades de discretización sobre los puntos de cruz.

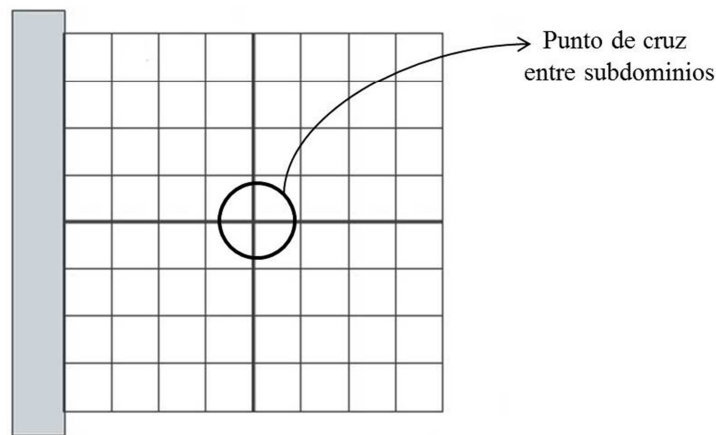


Figura 1.16: Punto de cruz entre subdominios (Rixen, 2002).

De igual manera, para aquellas simulaciones que presentan heterogeneidades en los puntos de cruz, como por ejemplo, subdominios con materiales diferentes o tamaños de mallas diferentes, en (Rixen, y otros, 1997) se proponen ciertas estrategias aplicadas sobre el preconditionador, para lograr una correcta transmisión de las variables a través de los puntos de cruz.

Los métodos FETI de nivel 2 fueron desarrollados en (Farhat, y otros, 1998) y aparecieron como una extensión de los métodos de nivel 1, caracterizándose por la introducción de un segundo set de multiplicadores de

Lagrange en los puntos de cruz para forzar continuidad exacta del campo de los desplazamientos en cada iteración.

La formulación dual-primal para los métodos FETI de nivel 2 (Farhat, y otros, 2001), elimina la necesidad de este segundo set de multiplicadores de Lagrange en los puntos de cruz y unifica los desarrollos previos de FETI-1 y FETI-2 en un método simple denominado FETI-DP.

## 1.3 Antecedentes en el cálculo de las Pseudoinversas

### 1.3.1 Cálculo de las matrices de flexibilidad “free-free”

Este método fue introducido por (Felippa, y otros, 1998) y presenta una generalización de la matriz clásica de flexibilidad estructural.

En esta técnica una subestructura es definida como un ensamble de elementos finitos que no posee modos de energía cero. En la Figura 1.17 se observa una subestructura y el sistema de fuerzas que actúa sobre ella, en donde las fuerzas aplicadas  $\mathbf{f}$  son un dato, las fuerzas de interacción  $\mathbf{\lambda}$  son ejercidas por otras subestructuras conectadas y por último, si la subestructura se encuentra apoyada o parcialmente apoyada, la fuerza  $\mathbf{f}_s$  representa las fuerzas de reacción asociada. Cada vector posee una longitud de  $N_f$  que corresponde al total de grados de libertad nodales de la subestructura.

Si la subestructura tiene  $N_r > 0$  modos de sólido rígido o “*Rigid Body Modes- RBM's*” linealmente independientes. Los movimientos de sólido rígido son caracterizados a través de su base RBM o la llamada matriz  $\mathbf{R}$ , de dimensiones  $N_f \times N_r$ .

La matriz  $\mathbf{R}$  puede ser escrita tomando como columnas linealmente independientes los desplazamientos rígidos evaluados en los nodos. Para construirla es conveniente colocar los ejes  $x, y$  en la media geométrica de las ubicaciones de los  $N$  nodos de la subestructura.

Los tres movimientos de sólido rígido independientes son:

- El movimiento de traslación en la dirección  $x$  :

$$u_x = 1, \quad u_y = 0 \quad (1.41)$$

- El movimiento de traslación en la dirección  $y$  :

$$u_x = 0, \quad u_y = 1 \quad (1.42)$$

- Y la rotación en  $z$  como:

$$u_x = -y, \quad u_y = x \quad (1.43)$$

La evaluación sobre los nodos, arroja el siguiente arreglo matricial:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Una vez se ha construido la matriz  $\mathbf{R}$ , el proyector ortogonal asociado a  $\mathbf{R}$  se puede escribir como la matriz simétrica (Felippa, y otros, 1998):

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{R}^T \quad (1.45)$$

A partir de las expresiones (1.44) y (1.45), la matriz de flexibilidad “free-free” de la subestructura se define mediante la expresión:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}(\mathbf{K} + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \quad (1.46)$$

Si la subestructura se encuentra fija, lo que significa que se encuentra totalmente restringida, la matriz  $\mathbf{R}$  se encuentra vacía, con lo cual, la ecuación (1.46) colapsa en la expresión de la flexibilidad estructural ordinaria  $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ . La matriz  $\mathbf{F}$  es considerada la pseudo-inversa de la matriz de rigidez.

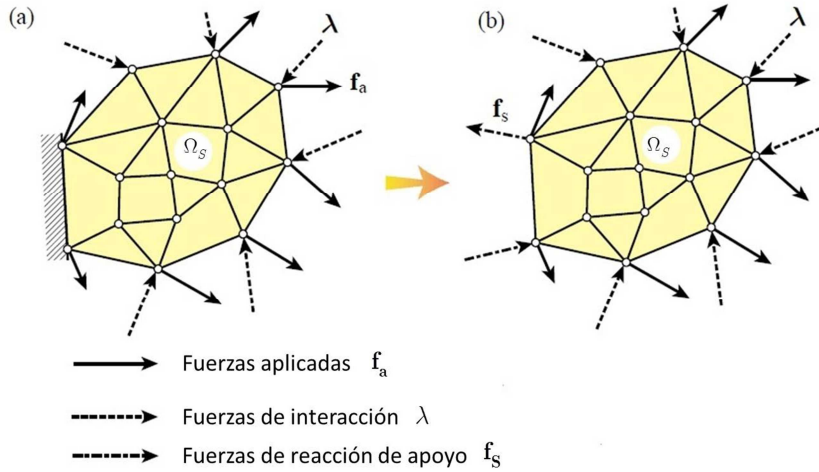


Figura 1.17: Subestructura genérica  $\Omega_S$  y el sistema de fuerzas que actúa sobre ella (Felippa, y otros, 1998).

### 1.3.2 Cálculo de los modos de sólido rígido y de la Pseudoinversa en los métodos FETI

En la implementación del método FETI, la matriz de rigidez de cada subdominio  $K_S$  se almacena en el formato “skyline” o perfil de la matriz. Esto significa que cada columna o fila, es almacenada comenzando con el primer elemento de la columna o de la fila que es diferente de cero (ver Figura 1.18).

Cuando la matriz  $K_S$  es no singular, una factorización de Cholesky es relativamente sencilla ya que  $K_S$  puede escribirse como:

$$K_S = L_S L_S^T \quad (1.47)$$

Donde  $L_S$  es una matriz triangular inferior. Así, la aplicación de su inversa se lleva a cabo de una forma muy sencilla:

$$\begin{aligned} K_S^{-1} u &= (L_S L_S^T)^{-1} u \\ K_S^{-1} u &= (L_S^T)^{-1} ((L_S)^{-1} u) \end{aligned} \quad (1.48)$$

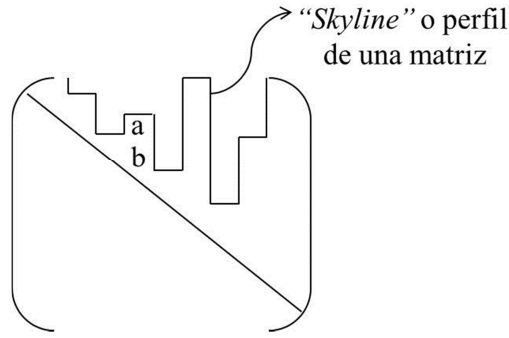


Figura 1.18: “Skyline” o perfil de una matriz.

Sin embargo, cuando  $\mathbf{K}_S$  es singular, lo que significa que  $\Omega_S$  es un subdominio flotante, la factorización mostrada en (1.47) arroja problemas cuando se encuentra un pivote igual a cero, así que, suponiendo que la matriz  $\mathbf{K}_S$  puede ser escrita como:

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp_S} & \mathbf{K}_{pr_S} \\ \mathbf{K}_{pr_S}^T & \mathbf{K}_{rr_S} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Donde el subíndice  $\mathbf{p}$  denota la cantidad principal y el  $\mathbf{r}$  la cantidad redundante.

Se define la matriz de los modos de sólido rígido  $\mathbf{R}_S$  y la Pseudoinversa  $\mathbf{K}^+$  de la  $\mathbf{K}_S$  como:

$$\mathbf{R}_S = \begin{bmatrix} -(\mathbf{K}_{pp_S})^{-1} \mathbf{K}_{pr_S} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$\mathbf{K}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp_S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

Sin embargo, en la práctica no se puede ordenar la matriz  $\mathbf{K}_S$  como se muestra en (1.49), es por esta razón que los autores (Farhat, y otros, 1991) proponen un método de implementación para el caso en el que la matriz  $\mathbf{K}_S$  ha sido almacenada en modo “Skyline”.

Además, se demuestra que el pivote cero que se encuentra durante la factorización de la matriz  $\mathbf{K}_S$ , indica la ecuación redundante que debe ser numerada y removida de la matriz original.

El pivote cero se establece como 1 y la columna reducida por encima de él se copia en un vector extra. Los coeficientes por debajo de la “*Skyline*” se hacen 0 (ver Figura 1.19). Al final del proceso de factorización, las ecuaciones no numeradas definen la matriz  $\mathbf{K}_{pp_s}$ .

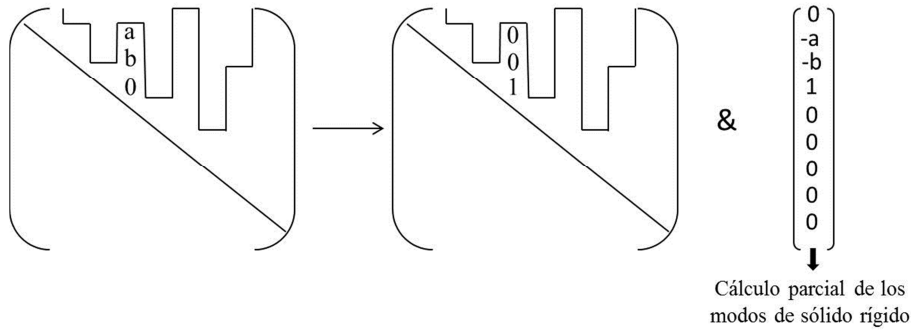


Figura 1.19: Incorporación del cálculo de la Pseudoinversa y de los modos de sólido rígido en la factorización de la matriz “*Skyline*”.

**Observación 1.4** La matriz  $\mathbf{K}_{pp_s}$  es una matriz de dimensiones

$n_{i_s} + n_{b_s} - n_{r_s}$ , con:  $n_{i_s}$  el número de nodos internos del subdominio,  $n_{b_s}$  los nodos del contorno y  $n_{r_s}$  el número de modos de sólido rígido.

## 1.4 Contenido de la Tesis

El resto de esta tesis se encuentra organizado en 4 capítulos. En el capítulo 2 se describirá el método propuesto *Subdominio de Interfaz*, destacando los aspectos geométricos, la generación de la interfaz, las ecuaciones de energía, el cálculo de la pseudoinversa de los subdominios flotantes, la resolución del problema mediante el método de las subestructuras y sus respectivos test de validación.



En el capítulo 3, se describirá la extensión del método visto en el capítulo 2, para el caso en el que se deseen llevar a cabo simulaciones numéricas con elementos finitos de formulaciones mixtas desplazamiento-presión. En este caso se observará como afecta la introducción de la variable presión al método de partición de dominios, las ecuaciones asociadas y los respectivos test de validación.

En el capítulo 4, se mostrará la solución de problemas termomecánicos acoplados mediante el uso de la técnica de partición de dominios propuesta en este trabajo, para ello, se introducirá la variable temperatura en el problema, las ecuaciones adicionales asociadas a esta variable y finalmente, la validación del método.

Por último, en el capítulo 5 se mostrarán las conclusiones y las respectivas líneas futuras de investigación de este trabajo.



## 2 El Método de Subdominio de Interfaz (MSI)

Los métodos de partición de dominios vistos en el capítulo 1, se caracterizan por la generación de una interfaz, de una dimensión menor a la del problema. Esta interfaz por lo general, recibe el nombre de marco de partición.

La técnica propuesta en este trabajo, se fundamenta en el algoritmo de contacto “*contact domain method*” (Oliver, y otros, 2009) y propone la creación de una interfaz que, aunque es de espesor nulo, carece de la necesidad de generar dicho marco de partición.

### 2.1 Antecedentes: Método del dominio de contacto

El “*Contact Domain Method*” es una técnica recientemente desarrollada por: (Hartmann, y otros, 2009) que parte del método clásico de los multiplicadores de Lagrange.

Se fundamenta en el enfoque del método de Nitsche desarrollado por (Heintz, y otros, 2006) en el que se introduce un término de estabilización que se ve muy similar al del método de penalización, pero que a diferencia de éste, exhibe menos influencia en la solución del problema. Esta estrategia de estabilización, conecta a los multiplicadores de Lagrange con el campo de las tensiones de los cuerpos en contacto, para su posterior condensación.

A diferencia de los métodos ya conocidos como el nodo-segmento (Hallquist, y otros, 1985) o segmento-segmento, el “*Contact Domain Method*”, no tiene la necesidad de proyectar ningún nodo/segmento del lado esclavo sobre la superficie maestra, ya que esta nueva técnica propone crear entre las superficies de contacto un dominio ficticio intermedio, denominado *dominio de contacto*, que conecta ambas superficies mediante una simple triangulación de Delaunay.

De esta manera, el método se puede aproximar mediante un set de elementos triangulares o parcelas triangulares no solapadas, que se encuentran dotadas del campo de los desplazamientos de los cuerpos en contacto y sus respectivas interpolaciones.

Entre las ventajas que exhibe esta estrategia, figuran:

- Permite la condensación de los multiplicadores de Lagrange.
- Elimina la necesidad de crear un marco de partición o proyecciones de una superficie sobre otra.
- Cumple con el “*patch test*”.
- Puede acoplar superficies de contacto con mallas coincidentes o no coincidentes.

## 2.2 Descripción del Método Propuesto

### 2.2.1 Aspectos generales

Considérese como ejemplo un dominio  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , con sus respectivas fronteras  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$ . Se definen las superficies de interfaz  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como las respectivas intercepciones entre los contornos de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que cumplan con la siguiente condición  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  (ver Figura 2.1).

Asumiendo que  $S$  corresponde al número de subdominio, siendo  $N_S$  el número total de subdominios obtenidos de la partición. Los vectores normales a cada una de las superficies  $\partial\Omega_S$  son denominados  $\mathbf{n}_S$  y siempre apuntarán hacia el exterior del subdominio.

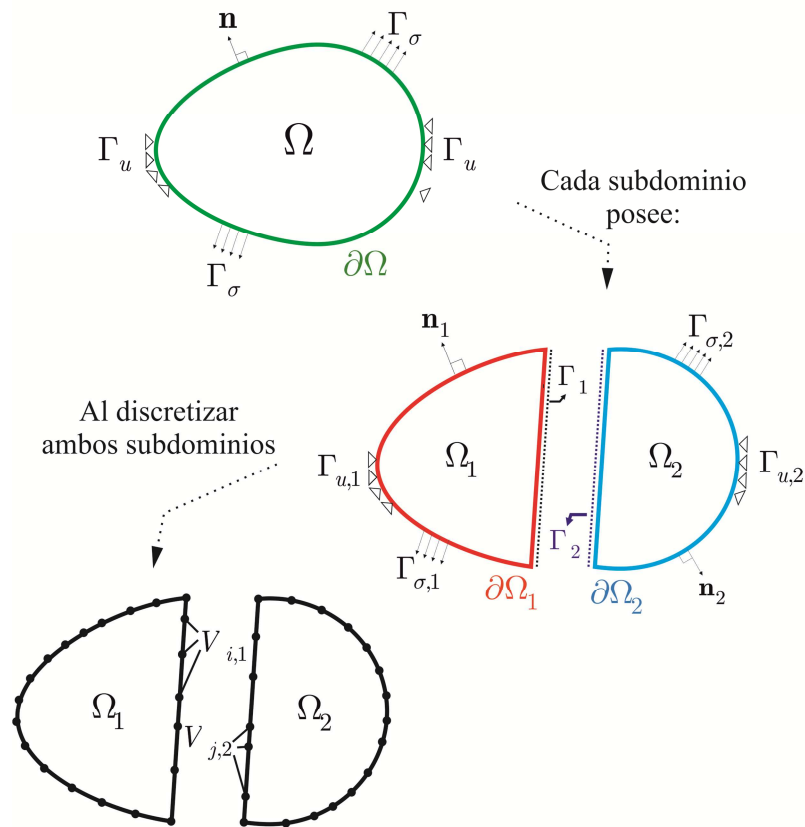


Figura 2.1: Partición de un dominio  $\Omega$  en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

Adicionalmente, y dependiendo de cómo se lleven a cabo las particiones, cada subdominio poseerá sus propias superficies  $\Gamma_{u,S}$  y  $\Gamma_{\sigma,S}$  sobre las cuales se aplicarán los desplazamientos y tensiones impuestas respectivamente. Sin embargo, es importante señalar que pueden existir subdominios sin condiciones de contorno, a los que llamaremos flotantes y a los que le dedicaremos el epígrafe 2.5 de este capítulo.

Una vez establecidos físicamente los subdominios, éstos son discretizados por medio de elementos finitos. Así, asumiendo que las fronteras  $\Gamma_S$  son lo suficientemente grandes como para contener todas las zonas de  $\partial\Omega_S$  que están en contacto; se definen los vértices  $V_{i,S}$  como

aquellos nodos sobre las superficies  $\Gamma_S$  que coinciden con la discretización de cada subdominio (ver Figura 2.1).

### 2.2.1.1 Generación de la interfaz

El proceso de obtención de la interfaz consiste en generar una triangulación de Delaunay entre los vértices  $V_{i,S}$  y  $V_{j,S}$  de cada una de las superficies  $\Gamma_S$  (ver Figura 2.1).

Sin embargo, como el espacio entre las superficies  $\Gamma_S$  es vacío, para generar esta triangulación es necesario llevar a cabo un tratamiento especial y transitorio sobre las interfaces. La estrategia que se propone, consiste en llevar a cabo una contracción ficticia sobre las fronteras  $\Gamma_S$  de cada uno de los subdominios en la dirección opuesta a la normal de dicha superficie ( $-\mathbf{n}_S$ ).

Esta contracción, permite crear unas nuevas coordenadas de los vértices  $V_{i,S}$  ubicados sobre las fronteras  $\Gamma_S$ , coordenadas que reciben el nombre de “*coordenadas ficticias*” y a partir de las cuales se puede generar directamente la triangulación de Delaunay.

Una vez que la interfaz ha sido generada, estas “*coordenadas ficticias*” desaparecen, recuperándose las coordenadas originales de cada uno de los vértices  $V_{i,S}$  y  $V_{j,S}$  tal y como se observa en la Figura 2.2. Así, aunque aparentemente entre los subdominios existe una interfaz de dos dimensiones, realmente ésta es de espesor nulo.

A este espacio ficticio originado por la malla de la interfaz, se le denomina dominio de interfaz  $D$  (ver Figura 2.3), y a cada uno de los triángulos que conforman este dominio, se les denomina parcelas  $D^q$ . Así, si  $N_q$  constituye el número total de triángulos de la interfaz, el dominio de interfaz  $D$  puede escribirse de la siguiente manera:

$$D = \bigcup_{q=1}^{N_q} D^q \quad (2.1)$$

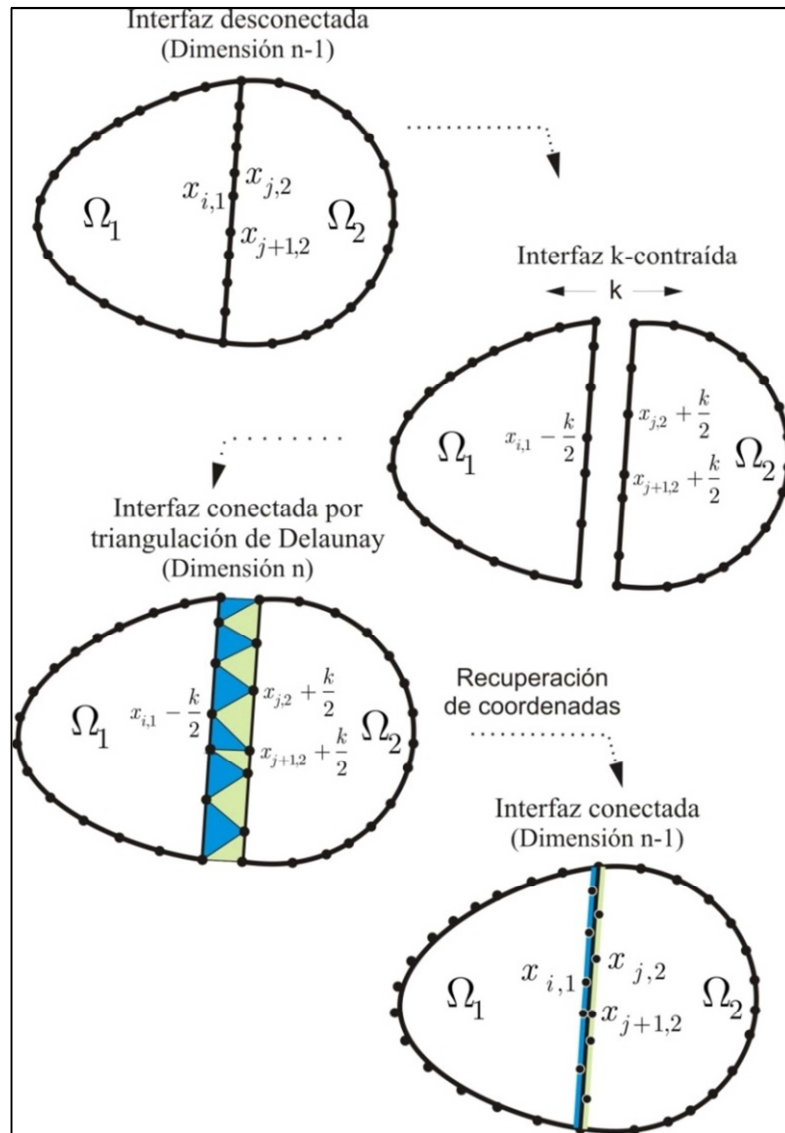


Figura 2.2: Pasos para la generación de la interfaz de contacto: 1) Discretización de los subdominios, 2) Contracción ficticia de los subdominios en la zona de la interfaz, 3) Generación de la malla entre subdominios por triangulación de Delaunay, 4) Recuperación de las coordenadas iniciales.

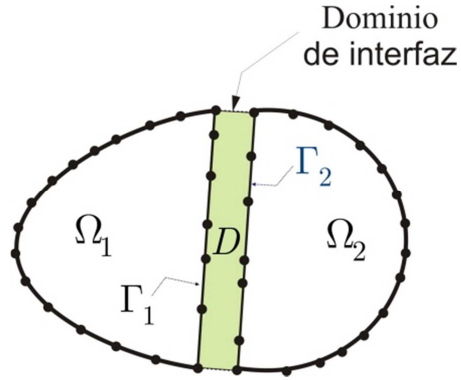


Figura 2.3: Dominio de interfaz: espacio ficticio creado entre los subdominios por la malla de la interfaz.

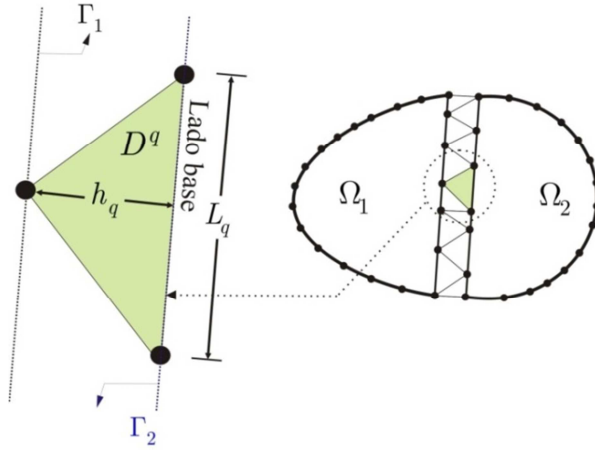


Figura 2.4: Medidas geométricas de cada una de las parcelas que conforma la interfaz.

Cada parcela  $D^q$  contendrá (ver Figura 2.4):

- Un lado base de longitud  $L_q$  que se encuentra ubicado sobre la superficie  $\Gamma_S$  que le corresponda.
- Una altura  $h_q$  que se mide perpendicularmente desde el lado base, hasta el vértice opuesto a él.



**Observación 2.1** Nótese que como  $h_q \rightarrow 0$  surgen interrogantes acerca de la obtención de ciertas integrales a resolver en el problema. Supóngase el caso más general en el que las superficies  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son curvas (Figura 2.5). Se asegura que las integrales sobre la interfaz convergen hacia un valor acotado y que pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{q=1}^{N_q} \lim_{h_q \rightarrow 0} \int_{D^q} \frac{1}{h_q} (\bullet) dD_q = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_q} \int_{L_q} (\bullet) dL_q + o(h) \quad (2.2)$$

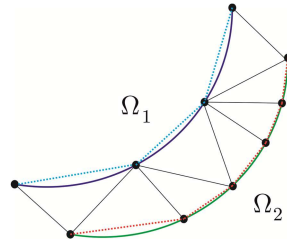


Figura 2.5: Generación de la interfaz en una superficie curva.

Donde  $o(h)$  corresponde al error generado por la aproximación de los triángulos de la interfaz, que no copian de manera exacta las superficies de contacto (ver Figura 2.5). Cuando las superficies  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son rectas  $o(h) \rightarrow 0$  y por lo tanto la integral puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sum_{q=1}^{N_q} \lim_{h_q \rightarrow 0} \int_{D^q} \frac{1}{h_q} (\bullet) dD_q \approx \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_q} \int_{L_q} (\bullet) dL_q \quad (2.3)$$

**Observación 2.2** Considerando que  $N_q$  corresponde al número total de elementos en la malla de interfaz, se observa que las integrales (2.2) y (2.3) toman en cuenta ambas discretizaciones, las de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  (ver Figura 2.6):

$$\delta \Pi_{\text{interf}} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (\bullet) d\Gamma \quad (2.4)$$

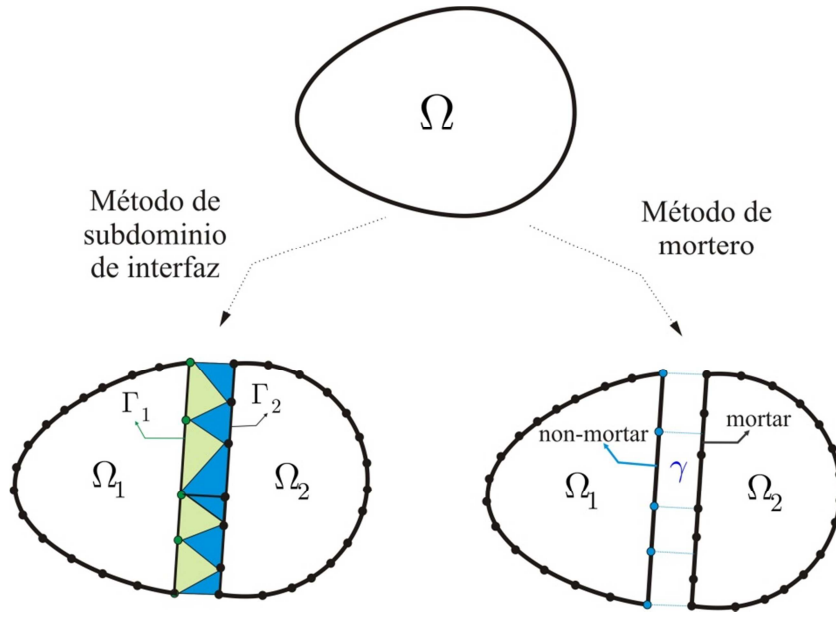


Figura 2.6: Diferencias entre el método de mortero y el método de subdominio de interfaz.

En el método de mortero visto en el apartado 1.2.2, la superficie  $\gamma$  sobre la que se lleva a cabo la integral, corresponde sólo a una de las dos discretizaciones, o la más fina o la más burda.

$$P_{N_c}^{LM} = \int_{\gamma=\gamma_1} (\bullet) dA \quad (2.5)$$

Este hecho, le permite al método propuesto (MSI) obtener en algunos tests, resultados más precisos en comparación con los adquiridos por el método de mortero en el caso en el que se escoja la discretización más burda como superficie  $\gamma$ . En el apartado 2.6.2 se mostrará un ejemplo en el que se pone en manifiesto este efecto.

## 2.2.2 Aspectos geométricos

### 2.2.2.1 Funciones de movimiento

Sea  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  los subdominios que conforman  $\Omega$ , tal que:

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \text{ y } \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (2.6)$$

Sea  $\phi_t^{(S)}(\mathbf{X}) \equiv \phi^{(S)}(\mathbf{X}, t) : \Omega_S \times [0, T]$  la función de movimiento del subdominio  $S$  tal que,  $\mathbf{X}_S \in \Omega_S$  en la configuración de referencia puede escribirse como  $\mathbf{x}_S = \phi_t^{(S)}(\mathbf{X}_S)$  en la configuración actual.

Asumiendo que el dominio de tiempo  $t \in [0, T]$  está subdividido en intervalos discretos, siendo  $[t_n, t_{n+1}]$  el intervalo de tiempo, de longitud  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ , con  $t_n$  y  $t_{n+1}$  los tiempos anterior y actual y  $\Omega_n^{(S)}$  y  $\Omega_{n+1}^{(S)}$  las configuraciones anterior y actual, respectivamente. Tomando en cuenta que  $\phi_{t_n}^{(S)} \equiv \phi_n^{(S)}$  y  $\phi_{t_{n+1}}^{(S)} \equiv \phi_{n+1}^{(S)}$  cualquier coordenada en las configuraciones  $\Omega_n$  y  $\Omega_{n+1}$  puede ser escrita como:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_{n+1}^{(S)} = \phi_{n+1}^{(S)}(\mathbf{X}_S) \\ \mathbf{x}_n^{(S)} = \phi_n^{(S)}(\mathbf{X}_S) \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{x}_{n+1}^{(S)} = \phi_{n+1}^{(S)}((\phi_n^{(S)})^{-1}(\mathbf{x}_n^{(S)})) = \phi_S(\mathbf{x}_n^{(S)}) \quad \forall \mathbf{x}_n^{(S)} \in \Omega_n^{(S)} \quad (2.7)$$

En donde la función  $\phi_S$ , obtenida a partir de la eliminación de la coordenada material  $X_S$ , define el movimiento incremental de los subdominios en el intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . A partir de este movimiento incremental, el campo de los desplazamientos puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n^{(S)}) = \phi_S(\mathbf{x}_n^{(S)}) - \mathbf{x}_n^{(S)} = \mathbf{x}_{n+1}^{(S)} - \mathbf{x}_n^{(S)} \quad \forall \mathbf{x}_n^{(S)} \in \Omega_n^{(S)} \quad (2.8)$$

Aunque la función de movimiento incremental  $\phi_S$  y los desplazamientos incrementales  $\mathbf{u}_S$  de las ecuaciones (2.7) y (2.8) están definidos para los subdominios  $\Omega_n^{(S)}$ , el dominio de interfaz  $D$  se encuentra dotado de una extensión de estos desplazamientos incrementales, por lo cual,

se define la función de movimiento incremental  $\phi_D$  del dominio de interfaz, como:

$$\begin{aligned} \phi_D : D_n &\rightarrow D_{n+1} \\ \phi_D(\mathbf{x}_n) &\equiv \mathbf{x}_{n+1}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_D(\mathbf{x}_n) \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

En donde el dominio de interfaz en la configuración actual  $D_{n+1}$ , representa la imagen del dominio  $D_n$  de la configuración anterior, a través de  $\phi_D$ , e incluso, las superficies de contacto  $\Gamma_S$  pueden ser escritas en la configuración actual como  $\gamma_S = \phi_D(\Gamma_S)$ .

El campo de los desplazamientos incrementales  $\mathbf{u}_D$  se obtiene como una interpolación lineal de los desplazamientos incrementales de los contornos de cada parcela, de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_D(\mathbf{x}_n) \equiv \mathbf{u}_q(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \mathbf{d}_i^{(D)} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n^q \quad (2.10)$$

En donde  $\mathbb{N}_i$  corresponde a las funciones lineales de interpolación para un elemento finito triangular y  $\mathbf{d}_i^{(D)}$  a los desplazamientos incrementales en los vértices 1,2 y 3 (nodos) de la parcela:

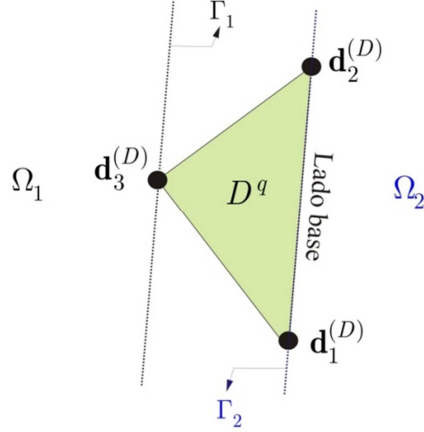


Figura 2.7: Definición del campo de los desplazamientos  $\mathbf{u}_D$  sobre cada una de las parcelas  $D^q$ .

A partir de la función de movimiento incremental  $\phi_D$  presentada en la ecuación (2.9) se puede definir la medida de deformación de este movimiento, en particular, el tensor gradiente de la deformación incremental como:

$$\mathbf{f}_D = \text{GRAD}(\phi_D(\mathbf{x}_n)) = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{1} + \text{GRAD}(\mathbf{u}_D) \quad (2.11)$$

En donde  $\mathbf{1}$  corresponde al tensor unitario de segundo orden.

**Observación 2.3** Nótese que, debido al carácter lineal del campo de los desplazamientos incrementales, descritos en la relación (2.10), el  $\text{GRAD}(\mathbf{u}_D)$  y  $\mathbf{f}_D$  son constantes dentro de cada una de las parcelas del dominio de interfaz, por lo tanto pueden ser escritos como:

$$\mathbf{f}_D(\mathbf{x}_n) \equiv \mathbf{f}_q = \text{constante} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D^q \quad (2.12)$$

### 2.2.2.2 Definición de los vectores normal y tangencial

Dentro del dominio de Interfaz, cada parcela triangular  $D_n^q$  posee un vector normal,  $\mathbf{N}_q$ , al lado base del triángulo. Puesto que este lado base se encuentra ubicado sobre la superficie  $\Gamma_S \in \partial\Omega_S$ , la normal  $\mathbf{N}_q$  apuntará en la misma dirección de la normal  $\mathbf{N}_S$  de cada subdominio.

Con el vector normal  $\mathbf{N}_q$ , el vector tangencial  $\mathbf{T}_q$  se define a partir de la condición de ortogonalidad, como:

$$\mathbf{T}_q = \hat{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{N}_q \quad (2.13)$$

Siendo el vector unitario  $\hat{\mathbf{e}}_3$  el vector que apunta hacia fuera del plano, de modo que el triplete de vectores unitarios que definen la parcela triangular  $D_n^q$  en la configuración previa, corresponde a:

$$\{\mathbf{N}_q \quad \mathbf{T}_q \quad \hat{\mathbf{e}}_3\} \quad (2.14)$$

A partir de la función de movimiento  $\phi_D$  el vector tangente  $\mathbf{t}_q$  en la configuración espacial puede escribirse como la imagen de  $\mathbf{T}_q$  sobre la configuración  $\Omega_{n+1}$  y el normal  $\mathbf{n}_q$ , como su correspondiente vector unitario ortogonal:

$$\mathbf{t}_q = \frac{\phi_D(\mathbf{T}_q)}{\|\phi_D(\mathbf{T}_q)\|} = \frac{\mathbf{f}_q \cdot \mathbf{T}_q}{\|\mathbf{f}_q \cdot \mathbf{T}_q\|} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{n}_q = \mathbf{t}_q \times \hat{\mathbf{e}}_3$$

**Observación 2.4** Se puede demostrar (Hartmann, y otros, 2009) que el vector normal  $\mathbf{n}_q$  también conserva la misma dirección a la normal del subdominio  $\mathbf{n}_S$  sobre la superficie  $\gamma_{D,S}$  y que el nuevo triplete de vectores unitarios que definen la parcela triangular  $D_{n+1}^q$  en la configuración actual, corresponde a:

$$\{\mathbf{n}_q \quad \mathbf{t}_q \quad \hat{\mathbf{e}}_3\} \quad (2.16)$$

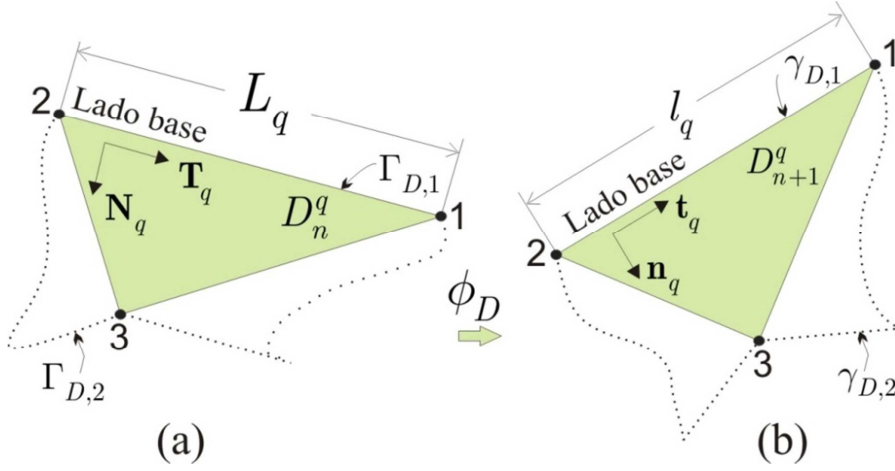


Figura 2.8: Definición de los vectores normal y tangencial sobre una parcela triangular (Hartmann, y otros, 2009).

### 2.2.2.3 Definición del gap

La medición de la penetración/separación o “gap” de cualquier partícula de los subdominios dentro de las parcelas triangulares, es de vital importancia para garantizar la eficacia del método.

Sin embargo, aunque estas medidas serán utilizadas en el desarrollo de la formulación, las ecuaciones de Euler Lagrange (apartado 2.3.1) indican que para que exista una correcta transferencia de información entre subdominios, esta medida en sus componentes normal y la tangencial, deben de ser iguales a cero.

#### Gap geométrico

La medida del gap, está definida tanto en la configuración previa  $g_{N,0}(\mathbf{x}_n)$  como en la configuración actual  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$ .

Para la configuración previa, representa la distancia entre cualquier  $\mathbf{x}_n \in D_n^q$  y su proyección a través del vector normal  $\mathbf{N}_q$  al lado base de la parcela triangular (Figura 2.9):

$$g_{N,0} = (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}_n) \quad (2.17)$$

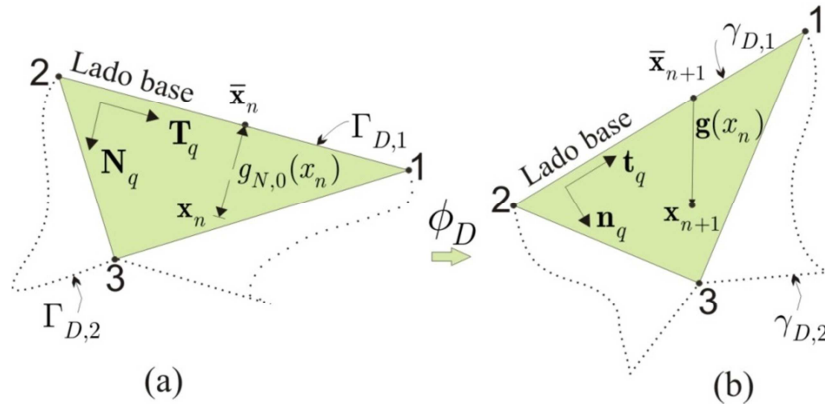


Figura 2.9: (a) Definición del gap en la configuración anterior y (b) en la configuración actual (Hartmann, y otros, 2009).

Mediante la función de movimiento  $\phi_D$  se obtiene la medida del gap en la configuración actual y a partir de los vectores  $\mathbf{n}_q$  y  $\mathbf{t}_q$  sus respectivas proyecciones en las direcciones normal y tangencial (2.19).

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{x}}_{n+1}) = \phi_D(\mathbf{x}_n) - \phi_D(\bar{\mathbf{x}}_n) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = g_N(\mathbf{x}_n)\mathbf{n}_q + g_T(\mathbf{x}_n)\mathbf{t}_q \Rightarrow \begin{cases} g_N(\mathbf{x}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{n}_q \\ g_T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{t}_q \end{cases} \quad (2.19)$$

Para poder obtener una expresión explícita del vector del gap en la configuración actual, en el trabajo (Hartmann, y otros, 2009) se propone llevar a cabo una expansión de Taylor sobre la expresión (2.18), con lo cual, se puede escribir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \phi_D(\mathbf{x}_n) = \phi_D(\bar{\mathbf{x}}_n + g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{N}_q) \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \phi_D(\bar{\mathbf{x}}_n) + GRAD(\phi_D) \cdot g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{N}_q \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \bar{\mathbf{x}}_{n+1} + g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{f}_q \cdot \mathbf{N}_q \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Observación 2.5** Nótese que esta expansión de Taylor llega hasta la primera derivada porque tal y como se menciona en la observación 2.3, el tensor gradiente de la deformación se ha definido constante dentro de toda la parcela triangular, y por ende, su derivada es nula.

Conociendo la expresión para la coordenada  $\mathbf{x}_{n+1}$  en  $\Omega_{n+1}$ , se puede reescribir la expresión del gap y sus respectivas proyecciones en las direcciones normal y tangencial:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{x}}_{n+1}) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{f}_q \cdot \mathbf{N}_q \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)(\mathbf{1} + GRAD(\mathbf{u}_q)) \cdot \mathbf{N}_q \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} g_N(\mathbf{x}_n) = \mathbf{n}_q \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{n}_q \cdot \mathbf{f}_q \cdot \mathbf{N}_q \\ g_N(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{n}_q \cdot (\mathbf{1} + GRAD(\mathbf{u}_q)) \cdot \mathbf{N}_q \\ g_N(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{n}_q \cdot (\mathbf{N}_q + GRAD(\mathbf{u}_q) \cdot \mathbf{N}_q) \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} g_T(\mathbf{x}_n) = \mathbf{t}_q \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{t}_q \cdot \mathbf{f}_q \cdot \mathbf{N}_q \\ g_T(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{t}_q \cdot (\mathbf{1} + GRAD(\mathbf{u}_q)) \cdot \mathbf{N}_q \\ g_T(\mathbf{x}_n) = g_{N,0}(\mathbf{x}_n)\mathbf{t}_q \cdot (\mathbf{N}_q + GRAD(\mathbf{u}_q) \cdot \mathbf{N}_q) \end{cases} \quad (2.23)$$

### Gap efectivo

El gap geométrico presentado anteriormente posee dimensión, lo cual constituye un problema para el desarrollo de la formulación. Es por esta razón, que se define una nueva medida del gap, totalmente adimensional



denominada *gap efectivo* y que consiste en el valor de gap geométrico por unidad de gap inicial normal  $g_{N,0}(\mathbf{x}_n)$ .

$$\bar{g}_N(\mathbf{x}_n) = \frac{g_N(\mathbf{x}_n)}{|g_{N,0}(\mathbf{x}_n)|}, \quad \bar{g}_T(\mathbf{x}_n) = \frac{g_T(\mathbf{x}_n)}{|g_{N,0}(\mathbf{x}_n)|} \quad (2.24)$$

Estas medidas después de ciertas manipulaciones matemáticas (Hartmann, y otros, 2009), pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{g}_N(\mathbf{x}_n) &= \text{sign}(g_{N,0}(\mathbf{x}_n)) \mathbf{n}_q \cdot (\mathbf{N}_q + \text{GRAD}(\mathbf{u}_q) \cdot \mathbf{N}_q) \\ \bar{g}_T(\mathbf{x}_n) &= \text{sign}(g_{N,0}(\mathbf{x}_n)) \mathbf{t}_q \cdot (\mathbf{N}_q + \text{GRAD}(\mathbf{u}_q) \cdot \mathbf{N}_q) \end{aligned} \quad (2.25)$$

#### 2.2.2.4 Definición de los vectores de tensión normal y tangencial

Partiendo del estado tensional  $\boldsymbol{\sigma}_S$  al que se encuentra sometido el subdominio  $S$  en la configuración actual  $\Omega_{n+1}$ . Se define sobre la configuración  $\Omega_n$  el vector de tracción orientado en la dirección normal a la interfaz  $\Gamma_S$  como:

$$\mathbf{t}_c(\mathbf{x}_n, \mathbf{N}) = \mathbf{P}_S(\mathbf{x}_n, t_{n+1}) \cdot \mathbf{N} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Gamma_{D,S} \quad (2.26)$$

Siendo  $\mathbf{P}_S$  el primer tensor de Piola-Kirchhoff obtenido a partir de la inversa de la función de movimiento  $(\phi_D)^{-1}$ . Este vector de tracción  $\mathbf{t}_c$ , al ser proyectado sobre los vectores normal y tangencial a la superficie, da lugar a los vectores de tracción normal  $t_{N,S}(\mathbf{x}_n)$  y tangencial  $t_{T,S}(\mathbf{x}_n)$   $\forall \mathbf{x}_n \in \Gamma_S$ :

$$\left. \begin{aligned} t_{N,S}(\mathbf{x}_n) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N} \\ t_{T,S}(\mathbf{x}_n) &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N} \end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Gamma_S \quad (2.27)$$

En la ecuación (2.27) los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{t}$  se encuentran ubicados sobre la interfaz  $\gamma_S$  de la configuración actual (ver Figura 2.8) (Oliver, y otros, 2009).

### 2.2.2.5 Definición de los multiplicadores de Lagrange Normal y Tangencial

La continuidad en los desplazamientos a través de la interfaz se impone mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange. Así, se introduce en el problema una nueva variable denominada  $\lambda^q$  que corresponde al campo de los multiplicadores de Lagrange definidos en el interior de cada una de las parcelas  $D_n^q$  (ver Figura 2.10) y que, por facilidades en el desarrollo de la formulación, se descompone en sus componentes normal y tangencial  $\lambda_N^q$  y  $\lambda_T^q$ .

Estas variables son definidas constantes dentro de toda la parcela  $D_n^q$  y para que puedan garantizar una correcta continuidad, deberán satisfacer las siguientes condiciones sobre la superficie  $\Gamma_S$ .

$$\left. \begin{aligned} \lambda_N^q(\mathbf{x}_n) &= t_{N,S}^q(\mathbf{x}_n) \\ \lambda_T^q(\mathbf{x}_n) &= t_{T,S}^q(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Gamma_S \quad (2.28)$$

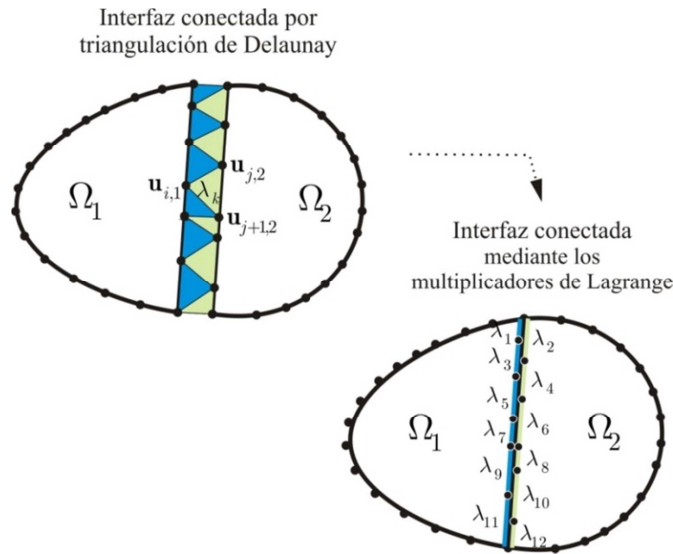


Figura 2.10: Incorporación de los multiplicadores de Lagrange dentro de las parcelas triangulares  $D^q$ .

## 2.3 Descripción del problema

### 2.3.1 Forma fuerte del problema

#### 2.3.1.1 Problema de valores de contorno

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda_N(\mathbf{x}_n) : D_n \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda_T(\mathbf{x}_n) : D_n \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.29)$$

SATISFACIENDO:

Ecuación de equilibrio:

$$\text{DIV} \mathbf{P}_S = -\mathbf{b}_S \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (2.30)$$

Modelo constitutivo:

$$\mathbf{P}_S = \sum_S(\mathbf{u}_S) \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (2.31)$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u}_S = \hat{\mathbf{u}}_S \quad \text{en } \Gamma_{u,S} \quad (2.32)$$

Condiciones de contorno de Neumann:

$$\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N}_S = \hat{\mathbf{t}}_S \quad \text{en } \Gamma_{\sigma,S} \quad (2.33)$$

Identificación de los Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \lambda_N = t_{N,S} \\ \lambda_T = t_{T,S} \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_S \quad (2.34)$$

Condición de restricción:

$$\begin{cases} \bar{g}_N = 0 \\ \bar{g}_T = 0 \end{cases} \quad \text{en } D_n \quad (2.35)$$

Donde  $\mathbf{P}_S$  representa el primer tensor de Piola Kirchhoff correspondiente a la configuración previa  $\Omega_n^S$  y que satisface la ecuación del modelo constitutivo (2.31),  $\mathbf{b}_S$  al vector de fuerzas de volumen en  $\Omega_n^S$ , y finalmente, las variables  $\hat{\mathbf{u}}_S$  y  $\hat{\mathbf{t}}_S$  que corresponden a las condiciones de

contorno de desplazamientos y tracciones impuestas sobre las superficies  $\Gamma_{u,S}$  y  $\Gamma_{\sigma,S}$ .

**Observación 2.6** La condición (2.34) identifica los multiplicadores de Lagrange como los valores de la tensión normal y tangencial  $t_{N,S}$  y  $t_{T,S}$  en su respectiva superficie de interfaz  $\Gamma_S$ . Y adicionalmente, la condición de restricción (2.35) establece que los valores de gap efectivos,  $\bar{g}_N$  y  $\bar{g}_T$  deben ser iguales a cero dentro de  $D_n^q$ .

## 2.3.2 Forma débil del problema

### 2.3.2.1 Principio de los trabajos virtuales

Se definen los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ \mathbf{u}_S \in H^1(\Omega_S), \mathbf{u}_S = \hat{\mathbf{u}}_S \text{ en } \Gamma_{u,S} \right\} \\ V &:= \left\{ \delta \mathbf{u}_S \in H^1(\Omega_S), \delta \mathbf{u}_S = 0 \text{ en } \Gamma_{u,S} \right\} \\ \alpha &:= \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in L^2(D) \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Donde  $H^1(\Omega_S)$  representa el espacio de Sobolev de funciones con derivadas de cuadrado integrable,  $L^2(D)$  el espacio de las funciones de cuadrado integrable y  $\Gamma_{u,S}$  la porción de la frontera del subdominio  $\Omega_S$  con desplazamientos impuestos  $\hat{\mathbf{u}}_S$ .

El problema consiste en encontrar los desplazamientos  $\mathbf{u}_S \in U$  y los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \alpha$ , tal que definan el extremo de la función potencial  $\Pi_{\text{mec}}$ :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{mec}} &:= \delta \Pi_{\text{int,ext}}(\mathbf{u}_S, \delta \mathbf{u}_S) \\ &\quad + \delta \Pi_{\text{interf}}(\mathbf{u}_D, \boldsymbol{\lambda}, \delta \mathbf{u}_D) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \end{aligned} \quad (2.37)$$

En donde  $\delta\Pi_{\text{mec}}$  consiste en la variación del trabajo mecánico total, constituido por la suma del trabajo virtual interno  $\delta\Pi_{\text{int}}$  y externo  $\delta\Pi_{\text{ext}}$ , realizado por cada uno de los subdominios, y el trabajo realizado por los multiplicadores de Lagrange a través de la interfaz,  $\delta\Pi_{\text{interf}}$ .

$$\delta\Pi_{\text{int,ext}}(\mathbf{u}_S, \delta\mathbf{u}_S) = \delta\Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_S, \delta\mathbf{u}_S) - \delta\Pi_{\text{ext}}(\delta\mathbf{u}_S) \quad (2.38)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{int}}(\mathbf{u}_S, \delta\mathbf{u}_S) &= \sum_{S=1}^{N_S} \left\{ \int_{\Omega_n^S} (\mathbf{P}_S : \text{GRAD}(\delta\mathbf{u}_S)) d\Omega \right\} \quad \text{y} \quad (2.39) \\ \delta\Pi_{\text{ext}}(\delta\mathbf{u}_S) &= \sum_{S=1}^{N_S} \left\{ \int_{\Omega_n^S} \mathbf{b}_S \cdot \delta\mathbf{u}_S d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma^S} \hat{\mathbf{t}}_S \cdot \delta\mathbf{u}_S d\Gamma \right\} \end{aligned}$$

Por su parte, el trabajo realizado por los multiplicadores de Lagrange sobre la interfaz, vendrá dado por la suma de las integrales sobre cada uno de los dominios de interfaz, siendo  $N_I$  el número total de interfaces que conforman el dominio  $\Omega$  particionado:

$$\delta\Pi_{\text{interf}}(\mathbf{u}_D, \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}_D) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \lambda_I \delta \bar{\mathbf{g}}_I(\mathbf{u}_D) dD \right\} \quad (2.40)$$

Con:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} \bar{g}_N \\ \bar{g}_T \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.30)-(2.34) corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de los trabajos virtuales visto en la ecuación (2.37).

### 2.3.2.2 Ecuaciones variacionales con restricciones

Las ecuaciones (2.39) y (2.40), se encuentran restringidas mediante dos ecuaciones variacionales adicionales que se derivan de la expresión (2.35) y que fuerzan de forma débil a que los gaps efectivos  $\bar{g}_N$  y  $\bar{g}_T$  sean nulos.

Tomando en cuenta la descomposición de los vectores  $\boldsymbol{\lambda}$  y  $\bar{\mathbf{g}}$  mostrada en la expresión (2.41), en (Oliver, y otros, 2009) se demuestra que la condición (2.35) corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange del principio variacional (2.42):

$$\delta\Pi_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}_D, \delta\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \delta\lambda_I \bar{\mathbf{g}}_I(\mathbf{u}_D) dD \right\} = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\lambda} \in \alpha \quad (2.42)$$

### 2.3.3 Linealización del sistema

#### 2.3.3.1 Discretización

Los desplazamientos  $\mathbf{u}_S \in \Omega_S$  pueden ser expresados como una función de las funciones de interpolación  $\mathbb{N}_i$  correspondientes a un elemento triangular lineal y de los desplazamientos de los nodos que lo conforman.

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \mathbf{d}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \quad (2.43)$$

De la misma manera, la variación de los desplazamientos  $\delta\mathbf{u}_S$  puede ser escrita como:

$$\delta\mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{d}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \quad (2.44)$$

En el caso de los desplazamientos  $\mathbf{u}_D$  de cualquier punto  $\mathbf{x}_n \in D_n$ , la interpolación se llevará a cabo a partir de los desplazamientos  $\mathbf{d}_D$  tal y como se observó en el apartado 2.2.2.1:

$$\mathbf{u}_D(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \mathbf{d}_{i,D} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \quad (2.45)$$

$$\delta\mathbf{u}_D(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{d}_{i,D} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \quad (2.46)$$

Para el caso de los multiplicadores de Lagrange, la interpolación vendrá dada por las siguientes expresiones:

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_n) = \Psi(\mathbf{x}_n) \boldsymbol{\Lambda} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \quad (2.47)$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_n) = \Psi(\mathbf{x}_n) \delta\boldsymbol{\Lambda} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \quad (2.48)$$

En donde  $\Psi(\mathbf{x}_n)$  corresponde a la función de colocación dentro de los elementos, definida dentro de cada una de las parcelas que conforman el dominio de interfaz  $D$ , de la siguiente manera:

$$\Psi(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x}_n \in D_n^q \\ 0 & \forall \mathbf{x}_n \notin D_n^q \end{cases} \quad (2.49)$$

Teniendo en cuenta estas interpolaciones, las integrales que conforman el principio de los trabajos virtuales implican el cumplimiento de las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\delta\Pi_{\text{int,ext}}(\mathbf{u}_S, \delta\mathbf{u}_S) \approx \delta\Pi_{\text{int,ext}}(\mathbf{d}_S, \delta\mathbf{d}_S) \rightarrow \mathbf{G}_{\text{int,ext}}(\mathbf{d}_S) = 0 \quad (2.50)$$

$$\mathbf{G}_{\text{int,ext}}(\mathbf{d}_S) = \sum_{S=1}^{N_S} \{ \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}_S) + \mathbf{F}_{\text{ext}} \} \quad (2.51)$$

Con:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}_S) = \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{S}_S : \text{GRAD}(\mathbf{N}) d\Omega_S \quad (2.52)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{\Omega_S} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_S d\Omega_S + \int_{\Gamma_{\sigma,S}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}_S \delta\Gamma_\sigma \quad (2.53)$$

Donde  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  corresponde al vector de fuerzas internas generado por cada uno de los subdominios,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  al vector de fuerzas externas y  $\mathbf{d}_S$  a los desplazamientos nodales discretos de cada subdominio  $\Omega_S$  (Oliver, y otros, 2009).

Por otra parte, la discretización del principio de los trabajos virtuales generado por los multiplicadores de Lagrange sobre la interfaz, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{interf}}(\mathbf{u}_D, \boldsymbol{\Lambda}, \delta\mathbf{u}_D) &\approx \delta\Pi_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \boldsymbol{\Lambda}, \delta\mathbf{d}_D) = 0 \\ \delta\Pi_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \boldsymbol{\Lambda}, \delta\mathbf{d}_D) &= 0 \rightarrow \mathbf{G}_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \boldsymbol{\Lambda}) = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \Psi \Lambda_N^{(I)} \left[ \bar{g}_N^{(I)} (\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{n}) \right] dD \right. \\ + \int_{D_n} \Psi \Lambda_T^{(I)} \left[ \bar{g}_N^{(I)} (\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{t}) \right] dD \\ \left. + \int_{D_n} \Psi \Lambda_T^{(I)} \left[ (\text{sign}(g_N^0) \mathbf{t} \cdot \text{GRAD}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}) \right] dD \right\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

En este caso  $\mathbf{G}_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \mathbf{\Lambda})$  depende de los desplazamientos nodales discretos  $\mathbf{d}_D$  de cada una de las interfaces y de los valores discretos de los multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{\Lambda}$ . Con lo cual, el principio variacional (2.37) conduce al siguiente vector de fuerzas residuales mecánicas:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{\text{mec}}(\mathbf{u}, \mathbf{\lambda}, \delta\mathbf{u}) &\approx \delta\Pi_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda}, \delta\mathbf{d}) = 0 \rightarrow \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda}) = 0 \\ \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda}) &= \mathbf{G}_{\text{int,ext}}(\mathbf{d}_S) + \mathbf{G}_{\text{interf}}(\mathbf{d}_D, \mathbf{\Lambda}) = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Estas mismas discretizaciones pueden utilizarse sobre las ecuaciones variacionales con restricciones, vistas en el apartado 2.3.2.2. Obteniendo los siguientes vectores de fuerzas residuales de las restricciones:

$$\delta\Pi_{\lambda_N}(\mathbf{u}_D, \delta\lambda_N) \approx \delta\Pi_{\lambda_N}(\mathbf{d}_D, \delta\Lambda_N) = 0 \rightarrow \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}_D) = 0 \quad (2.57)$$

$$\mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}_D) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \text{sign}(g_N^0) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{N} + \text{GRAD}(\mathbf{N}) \mathbf{N} \mathbf{d}_D) dD \right\} \quad (2.58)$$

$$\delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{u}_D, \delta\lambda_T) \approx \delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{d}_D, \delta\Lambda_T) = 0 \rightarrow \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}_D) = 0 \quad (2.59)$$

$$\mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}_D) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \text{sign}(g_N^0) \mathbf{t} \cdot (\mathbf{N} + \text{GRAD}(\mathbf{N}) \mathbf{N} \mathbf{d}_D) dD \right\} \quad (2.60)$$

Así, el nuevo problema discreto a resolver será:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{d} \\ \mathbf{\Lambda} \end{cases} \quad (2.61)$$

$$\text{SATISFACIENDO: } \begin{cases} \mathbf{G}_{\text{int,ext}}(\mathbf{d}) + \mathbf{G}_{\text{interf}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda}) = 0 \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}) = 0 \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}) = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

Este sistema de ecuaciones no lineales puede ser resuelto de forma iterativa mediante el método de Newton-Raphson, a partir de la linealización de las ecuaciones (2.61) y (2.62):



$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda}) \\ \mathbf{G}_{\text{R}}(\mathbf{d}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \mathbf{\Lambda}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{R}}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.63)$$

Sin embargo, puesto que los vectores residuales de las restricciones  $\mathbf{G}_{\text{R}}$  no dependen de los multiplicadores de Lagrange, al derivar en función de la variable  $\mathbf{\Lambda}$  aparecen ceros en la diagonal de la matriz de rigidez (2.63), razón por la cual, el problema puede estar propenso a exhibir inestabilidades en el caso que las discretizaciones utilizadas no satisfagan la condición de Babuska-Brezzi-Ladyzhenskaya (BBL) (Oliver, y otros, 2009).

### 2.3.4 Método de la estabilización consistente

Para poder manejar estas posibles inestabilidades, en este trabajo se propone utilizar una estabilización basada en el método de Nitsche o de penalización (Hartmann, y otros, 2009).

La idea del método es añadir un término de estabilización a la ecuación variacional con restricciones (2.42). A partir de este término, se conseguirá una dependencia con respecto a los multiplicadores de Lagrange discretos  $\mathbf{\Lambda}$ , eliminándose los ceros de la diagonal en la matriz de rigidez del sistema (2.63).

La estabilización vendrá motivada por la identificación de los multiplicadores de Lagrange vista en la expresión (2.34) y será adicionada de forma débil, en las ecuaciones variacionales con restricciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\lambda_N}(\mathbf{u}_D, \lambda_N, \delta \lambda_N) = & \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \delta \lambda_N^{(I)} \bar{g}_N^{(I)}(\mathbf{u}_D) dD \right\} \\ & + \underbrace{\sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{\Gamma_S} \delta \lambda_N^{(I)} \tau_{\mathbf{u}}(t_N(\mathbf{u}_S) - \lambda_N^{(I)}) d\Gamma \right\}}_{\text{Término adicional}} = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{u}_D, \lambda_T, \delta\lambda_T) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \delta\lambda_T^{(I)} \bar{g}_T^{(I)}(\mathbf{u}_D) dD \right\} + \underbrace{\sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{\Gamma_s} \delta\lambda_T^{(I)} \tau_{\mathbf{u}}(t_T(\mathbf{u}_S) - \lambda_T^{(I)}) d\Gamma \right\}}_{\text{Término adicional}} = 0 \quad (2.65)$$

Donde  $\tau_{\mathbf{u}} > 0$  es un parámetro que ajusta las dimensiones del término adicional de la siguiente forma:

$$\tau_{\mathbf{u}} = \frac{\alpha L}{E} \quad (2.66)$$

Siendo  $\alpha > 0$  un valor adimensional,  $L$  la longitud de la parcela triangular y  $E$  al módulo de Young del material (Oliver, y otros, 2009). Esta nueva modificación, permite que los nuevos vectores de fuerzas residuales de las restricciones  $\mathbf{G}_{R_N}$  y  $\mathbf{G}_{R_T}$  (2.58) y (2.60), dependan de ambas variables discretas:

$$\mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}_D, \Lambda_N) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \text{sign}(g_N^0) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{N} + \text{GRAD}(\mathbf{N}) \mathbf{N} \mathbf{d}_D) dD \right\} + \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{\Gamma_n} \tau_{\mathbf{u}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_S^{(I)} \cdot \mathbf{N} - \Psi \Lambda_N^{(I)}) d\Gamma \right\} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}_D, \Lambda_T) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \text{sign}(g_N^0) \mathbf{t} \cdot (\mathbf{N} + \text{GRAD}(\mathbf{N}) \mathbf{N} \mathbf{d}_D) dD \right\} + \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{\Gamma_n} \tau_{\mathbf{u}} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{P}_S^{(I)} \cdot \mathbf{N} - \Psi \Lambda_T^{(I)}) d\Gamma \right\} \quad (2.68)$$

Con lo cual, el nuevo sistema linealizado puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda) \\ \mathbf{G}_R(\mathbf{d}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \Lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.69)$$

**Observación 2.7** Obsérvese que  $\tau_{\mathbf{u}}$  podría ser considerado como un factor que penaliza los términos  $(t_N(\mathbf{u}_S) - \lambda_N)$  y  $(t_T(\mathbf{u}_S) - \lambda_T)$  de las ecuaciones (2.64) y (2.65). Sin embargo, ya que estos términos forman parte de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.34), el refinamiento de la malla impone automáticamente que ambos tiendan a cero. Por lo tanto, el procedimiento podría ser calificado como un método de penalización consistente, en el cual, a diferencia de los métodos de penalización no consistentes,  $\tau_{\mathbf{u}}$  puede ser pequeño (o incluso muy pequeño) sin afectar necesariamente la calidad de los resultados obtenidos.

**Observación 2.8** Nótese que la tensión  $\mathbf{P}_S^{(I)} \in \Omega_S$  presente en las ecuaciones (2.67) y (2.68), corresponde a la tensión del elemento adyacente al lado base de la parcela triangular  $D^q$ .

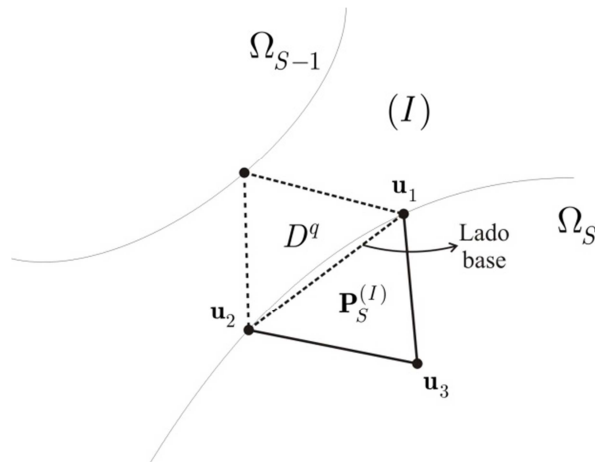


Figura 2.11: Estado tensional adjunto al elemento de interfaz  $D^q$ .

## 2.4 Resolución del sistema mediante el método de las subestructuras

Tal y como se observó en el apartado 1.2.5, el método de las subestructuras facilita el cálculo en paralelo en la resolución de sistemas mixtos (Farhat, y otros, 1991).

Si el sistema de elementos finitos completo, es subdividido en  $N_S$  subdominios, cada grupo de elementos dentro del subdominio puede ser procesado simultáneamente mediante el método de las subestructuras, ya que éste parte del hecho que cualquier sistema del tipo matriz-vector  $\mathbf{Ku}$  puede ser calculado de forma paralela mediante la siguiente expresión (Farhat, 1990):

$$\mathbf{Ku} = \sum_{S=1}^{N_S} \mathbf{K}_S \mathbf{u}_S \quad (2.70)$$

Donde  $\mathbf{K}_S$  denota la matriz de rigidez del subdominio  $S$  y  $\mathbf{u}_S$  la localización del vector de los desplazamientos para dicho subdominio.

Suponiendo que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dd}} & \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda} \\ \mathbf{K}_{\Lambda\text{d}} & \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mech}}(\mathbf{d}, \Lambda) \\ \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_\Lambda \end{bmatrix}$$

De manera alternativa a la expresión (2.70), el método de las subestructuras para este caso en específico, propone que cada una de estas matrices  $\mathbf{K}_{\text{dd}}, \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda}, \mathbf{K}_{\Lambda\text{d}}, \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda}$  y sus respectivos vectores de fuerzas sean calculados de manera independiente para cada uno de los subdominios.

Así, la discretización de la forma variacional de las ecuaciones de equilibrio, junto con las ecuaciones de las restricciones, dan lugar a un sistema como el presentado en (2.72) (Lloberas Valls, 2013).

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(1)} \end{bmatrix} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(S)} \end{bmatrix} & & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(N_s)} \end{bmatrix} & \\
\hline
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(1)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(S)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(N_s)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(1)} \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(S)} \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(N_s)} \end{bmatrix} \\
\Delta\Lambda
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_d^{(1)} \\
\vdots \\
\mathbf{f}_d^{(S)} \\
\vdots \\
\mathbf{f}_d^{(N_s)} \\
\mathbf{f}_\Lambda
\end{bmatrix} \quad (2.72)$$

El cual, al ser desglosado en cada una de las ecuaciones que lo conforman, corresponde al siguiente sistema de  $N_s + 1$  ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^{(1)} &= \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(1)} \Delta\Lambda + \mathbf{K}_{dd}^{(1)} \Delta\mathbf{d}^{(1)} \\
\vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
\mathbf{f}_d^{(S)} &= \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(S)} \Delta\Lambda + \mathbf{K}_{dd}^{(S)} \Delta\mathbf{d}^{(S)} \\
\vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
\mathbf{f}_d^{(N_s)} &= \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(N_s)} \Delta\Lambda + \mathbf{K}_{dd}^{(N_s)} \Delta\mathbf{d}^{(N_s)}
\end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_\Lambda &= \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda} \Delta\Lambda \\
&\quad + \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(1)} \Delta\mathbf{d}^{(1)} + \dots + \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(S)} \Delta\mathbf{d}^{(S)} + \dots + \mathbf{K}_{\Lambda d}^{(N_s)} \Delta\mathbf{d}^{(N_s)}
\end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones y por medio de un método de sustitución, se puede obtener el campo de los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_S \Delta\Lambda &= \mathbf{f}_S \\
\mathbf{F}_S &= \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda} - \sum_{S=1}^{N_s} (\mathbf{K}_{\Lambda d}^{(S)})^T (\mathbf{K}_{dd}^{(S)})^{-1} \mathbf{K}_{d\Lambda}^{(S)} \\
\mathbf{f}_S &= \mathbf{f}_\Lambda - \sum_{S=1}^{N_s} (\mathbf{K}_{d\Lambda}^{(S)})^T (\mathbf{K}_{dd}^{(S)})^{-1} \mathbf{f}_d^{(S)}
\end{aligned} \quad (2.74)$$

Y posteriormente, conociendo  $\Delta\Lambda$  se puede obtener el campo de los desplazamientos de cada uno de los subdominios, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{d}^{(1)} &= (\mathbf{K}_{\text{dd}}^{(1)})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{d}}^{(1)} - \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda}^{(1)} \Delta \Lambda) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\Delta \mathbf{d}^{(S)} &= (\mathbf{K}_{\text{dd}}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{d}}^{(S)} - \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda}^{(S)} \Delta \Lambda) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\Delta \mathbf{d}^{N_S} &= (\mathbf{K}_{\text{dd}}^{N_S})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{d}}^{(N_S)} - \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda}^{(N_S)} \Delta \Lambda)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Esta independencia en cada uno de los cálculos de las respectivas matrices de rigidez y de los campos de desplazamientos, permite que cada procesador pueda ejecutar su parte del algoritmo de manera simultánea (Figura 2.12) para, posteriormente, pasarle toda la información a un procesador maestro, que será quien calcule la información global correspondiente a los multiplicadores de Lagrange.

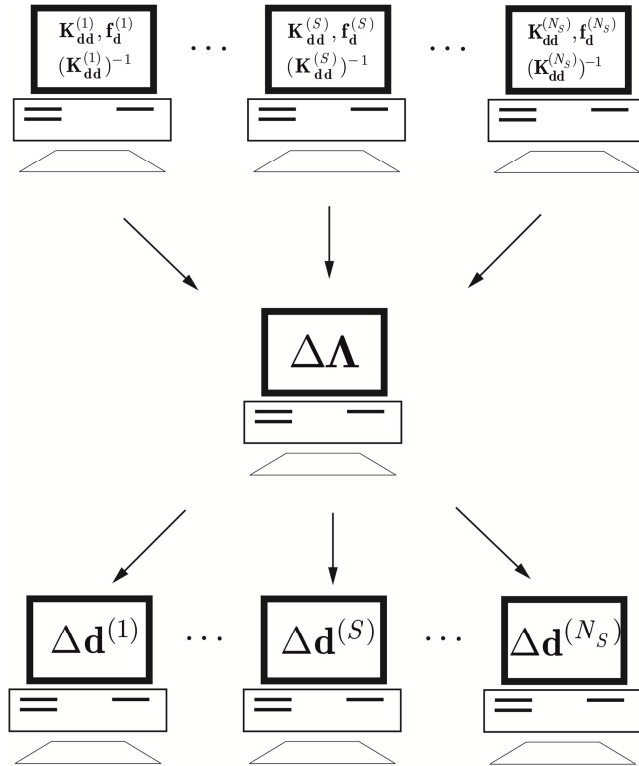


Figura 2.12: Cálculo en paralelo realizado mediante el método de las subestructuras.

---

BOX 1: Algoritmo iterativo para la resolución del sistema mixto sin subdominios flotantes.

---

Inicialización: 
$$\begin{cases} \mathbf{d}_1^{(S)} = \mathbf{d}_0^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)} \\ \mathbf{\Lambda}_0 = 0 \end{cases}$$

Actualización de las coordenadas:  $\mathbf{x}_{1,S} = \mathbf{X}_{0,S} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)}$

1. Inicio del estado de carga ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ )
2. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{d,0}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda,0}$
3. Inicio del Algoritmo iterativo del Newton Raphson ( $i = i + 1$ )
4. Cálculo de las matrices:  $\mathbf{K}_{dd,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{d\Lambda,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda d,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda,i}$
5. Cálculo de las variables:
  - a. Multiplicadores de Lagrange:

$$\Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i} = (\mathbf{F}_{S,i})^{-1} \mathbf{f}_{S,i}$$

$$\mathbf{F}_{S,i} = \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda,i} - \sum_{S=1}^{N_S} (\mathbf{K}_{\Lambda d,i}^{(S)}) (\mathbf{K}_{dd,i}^{(S)})^{-1} \mathbf{K}_{d\Lambda,i}^{(S)}$$

$$\mathbf{f}_{S,i} = \mathbf{f}_{\Lambda,i} - \sum_{S=1}^{N_S} (\mathbf{K}_{\Lambda d,i}^{(S)}) (\mathbf{K}_{dd,i}^{(S)})^{-1} \mathbf{f}_{d,i}^{(S)}$$

- b. Desplazamientos:

$$\Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = (\mathbf{K}_{dd,i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_d^{(S)} - \mathbf{K}_{d\Lambda,i}^{(S)} \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i})$$

$$6. \text{ Actualización de las variables: } \begin{cases} \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = \mathbf{d}_1^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} \\ \mathbf{\Lambda}_{1,i} = \mathbf{\Lambda}_0 + \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i} \end{cases}$$

7. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{d,i}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda,i}$
8. Cálculo del vector de fuerzas residuales:  $\mathbf{f}_{\text{Res},i}$
9. Estimación del error:
 

Si  $\mathbf{f}_{\text{Res},i} < TOL.$ , ir al paso 1 haciendo ( $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ )

Si no, regresar al paso 3.

---

<sup>1</sup> Todas las operaciones que poseen el superíndice ( $S$ ) requieren un bucle sobre los  $N_S$  subdominios.

---

## 2.5 Eliminación de los movimientos de sólido rígido

Tal y como se mencionó en el apartado 1.2.5.1 no todas las matrices de rigidez de los subdominios son no singulares. Cuando al particionar el dominio  $\Omega$ , aparecen subdominios sin las condiciones de contorno suficientes para suprimir los movimientos de sólido rígido, las expresiones (2.74) y (2.75) para el cálculo de los multiplicadores de Lagrange y de los desplazamientos, no pueden utilizarse directamente.

Al no poder invertirse la matriz  $\mathbf{K}_{dd}$  de los subdominios flotantes, es necesario llevar a cabo un tratamiento especial para poder obtener los  $\Delta\mathbf{A}$  y  $\Delta\mathbf{d}^{(s)}$  de cada uno de los subdominios.

Este tratamiento especial, consiste en el cálculo de la pseudoinversa de la matriz de rigidez, que según cada autor puede ser obtenida mediante métodos diversos, como por ejemplo el visto en el apartado 1.3.1 propuesto por (Felippa, y otros, 1998) en el que se calcula la matriz de flexibilidad *free-free*, por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{K}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{R}^T)(\mathbf{K} + \mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} \quad (2.76)$$

Siendo  $\mathbf{R}$  una matriz llena, de dimensiones  $N_f \times N_r$ , donde  $N_f$  corresponde al total de grados de libertad del subdominio y  $N_r$  a los modos de sólido rígido presentes en la estructura.

La implementación de la pseudoinversa de la matriz  $\mathbf{K}_{dd}$  a partir de esta técnica en específico, manifiesta ciertas dificultades; el hecho que la matriz  $\mathbf{R}$  sea una matriz llena (ver expresión 1.44), hace que la matriz  $\mathbf{K}^+$  pierda su característica de matriz dispersa, lo cual, incrementa de manera considerable los tiempos de cálculo y la eficiencia computacional del código.

Por otra parte, la técnica FETI, presentada por (Farhat, y otros, 1991) en el apartado 1.3.2, si bien fue pensada para el cálculo en paralelo y para la optimización de los tiempos de cálculo, es altamente invasiva a nivel de implementación.



Es por esta razón, que en este trabajo se propone una nueva estrategia para el cálculo de la pseudoinversa de la matriz de rigidez. Se propone una técnica mínimamente invasiva a nivel de implementación y que no rompa con las características de matriz dispersa que posee intrínsecamente la matriz de rigidez.

### 2.5.1 Método de estabilización (consistente) por la interfaz

El método propuesto, plantea añadir a la forma variacional del funcional de energía (2.37) un término adicional de estabilización consistente, vía el método de la penalización:

$$\delta\Pi_{\text{mec}}^*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}) := \delta\Pi_{\text{mec}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}) + \delta\Pi_{\text{RBM}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = 0 \quad (2.77)$$

$$\delta\Pi_{\text{RBM}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{N_r} \left\{ c \int_{D_r^r} (\delta\bar{\mathbf{g}})_r \bar{\mathbf{g}}_r dD_r \right\} \quad (2.78)$$

El término (2.78) se adiciona sobre algunas, o todas las parcelas de las interfaces asociadas al subdominio flotante; es por esta razón que el sumatorio en (2.78) se lleva a cabo sobre  $N_r$  elementos de la interfaz, con  $N_r \leq N_q$ , siendo  $N_q$  el total de parcelas de la interfaz.

Sin embargo, aunque este número puede ser escogido de manera aleatoria, la cantidad de elementos de la interfaz utilizados en la estabilización (de ahora en adelante denominados *elementos estabilizadores*), puede influir en la convergencia del método.

Cuando los elementos estabilizadores escogidos, no son suficientes como para suprimir los movimientos de sólido rígido, la nueva matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd}}$  seguirá siendo no invertible, y por lo tanto, no habrá convergencia. En la Figura 2.13 se puede observar este fenómeno.

En el apartado 2.6.3 se lleva a cabo un estudio realizado sobre una viga con subdominios flotantes, en el que se observa la relación existente entre el número de elementos estabilizadores y el número de condición de la nueva matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd}}$  así como también, su relación con el error del salto cometido por la interfaz.



Figura 2.13: Cantidad mínima de elementos necesaria para suprimir los movimientos de sólido rígido en el subdominio flotante  $\Omega_2$ .

**Observación 2.9** Conociendo que la ecuación (2.78) proviene de la siguiente función de penalización:

$$P = \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{g}}\|^2 \quad (2.79)$$

Se enfatiza nuevamente que se está utilizando una penalización de tipo consistente, ya que el gap es forzado de forma débil a tender a cero. Véase la Observación 2.7.

### 2.5.1.1 Discretización del término de estabilización

La discretización del término de estabilización (2.78) a partir de las expresiones de interpolación presentadas en el apartado 2.3.3.1, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\delta \Pi_{\text{RBM}}(\mathbf{u}_S, \delta \mathbf{u}_S) \approx \delta \Pi_{\text{RBM}}(\mathbf{d}_S, \delta \mathbf{d}_S) = 0 \rightarrow \mathbf{G}_{\text{RBM}}(\mathbf{d}_S) = 0 \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{RBM}}(\mathbf{d}_S) = c \sum_{r=1}^{N_r} \int_{D_n^r} & \left\{ \frac{h}{|H|} \mathbf{n}_S \text{grad}(\mathbf{N}) \mathbf{n}_S \bar{g}_N dD_r \right. \\ & + \frac{h}{|H|} \mathbf{n}_S \text{grad}(\mathbf{N}) \mathbf{t}_S \bar{g}_T dD_r \\ & \left. + s \text{ign}(g_N^0) \mathbf{t}_S \text{GRAD}(\mathbf{N}) \mathbf{N}_S \bar{g}_T dD_r \right\} \end{aligned} \quad (2.81)$$

### 2.5.1.2 Linealización

A partir de la expresión (2.80) y (2.81), el nuevo sistema mixto, a resolver en el caso en el que existen subdominios flotantes, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{RBM}}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_R(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \Lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mec}}^*(\mathbf{d}, \Lambda) \\ \mathbf{G}_R(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

En el sistema (2.82), se observa la existencia de una nueva matriz de rigidez que puede ser escrita como  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd}}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd}} = \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}(\mathbf{d}, \Lambda)}{\partial \mathbf{d}} + \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{RBM}}}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{\text{RBM}}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = c \sum_{r=1}^{N_r} \int_{D_n^r} (\delta \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{d})) (\delta \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{d})) dD_r = c \tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} \quad (2.84)$$

La nueva matriz (2.83), tal y como se mostrará en el apartado 0, es invertible y garantiza la convergencia del método.

### 2.5.1.3 Algoritmo de solución iterativa para el caso de subdominios flotantes

---

BOX 2: Algoritmo iterativo para la resolución del sistema mixto con subdominios flotantes.

---

$$\text{Inicialización: } \begin{cases} \mathbf{d}_1^{(S)} = \mathbf{d}_0^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)} \\ \Lambda_0 = 0 \end{cases}$$

Actualización de las coordenadas:  $\mathbf{x}_{1,S} = \mathbf{X}_{0,S} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)}$

1. Inicio del estado de carga ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ )
  2. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{d},0}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda,0}$
  3. Inicio del Algoritmo iterativo del Newton Raphson ( $i = i + 1$ )
  4. Cálculo de las matrices:  $\mathbf{K}_{\text{dd},i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda\text{d},i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda,i}$
-

---

5. Reconocimiento de subdominios flotantes<sup>1</sup>:

- a. Cálculo de la matrices  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd}}$  para los subdominios flotantes:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd},i}^{(f)} = \mathbf{K}_{\text{dd},i}^{(f)} + c(\tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)})^T \tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)}$$

6. Cálculo de las variables:

- a) Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i} &= (\mathbf{F}_{S,i})^{-1} \mathbf{f}_{S,i} \\ \mathbf{F}_{S,i} &= \mathbf{K}_{\Lambda\Lambda,i} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} (\mathbf{K}_{\Lambda\text{d},i}^{(S)}) (\mathbf{K}_{\text{dd},i}^{(S)})^{-1} \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda,i}^{(S)} \\ &\quad - \sum_{f=1}^{N_{SF}} (\mathbf{K}_{\Lambda\text{d},i}^{(f)}) (\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd},i}^{(f)})^{-1} \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda,i}^{(f)} \\ \mathbf{f}_{S,i} &= \mathbf{f}_{\Lambda,i} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} (\mathbf{K}_{\Lambda\text{d},i}^{(S)}) (\mathbf{K}_{\text{dd},i}^{(S)})^{-1} \mathbf{f}_{\text{d},i} \\ &\quad - \sum_{f=1}^{N_{SF}} (\mathbf{K}_{\Lambda\text{d},i}^{(f)}) (\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd},i}^{(f)})^{-1} \mathbf{f}_{\text{d},i} \end{aligned}$$

- b. Desplazamientos:

IF ( $S$ ) = No flotante

$$\Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = (\mathbf{K}_{\text{dd},i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{d}}^{(S)} - \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda,i}^{(S)} \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i})$$

ELSE

$$\Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = (\tilde{\mathbf{K}}_{\text{dd},i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\text{d}}^{(S)} - \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda,i}^{(S)} \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i})$$

END

7. Actualización de las variables:  $\begin{cases} \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = \mathbf{d}_1^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} \\ \mathbf{\Lambda}_{1,i} = \mathbf{\Lambda}_0 + \Delta \mathbf{\Lambda}_{1,i} \end{cases}$

8. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{\text{d},i}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda,i}$

9. Cálculo del vector de fuerzas residuales:  $\mathbf{f}_{\text{Res},i}$

10. Estimación del error:

Si  $\mathbf{f}_{\text{Res},i} < TOL.$ , ir al paso 1 haciendo  $(t_{i+1} = t_1 + \Delta t)$

Si no, regresar al paso 3.

---

---

<sup>1</sup>  $N_{SP}$  corresponde al total de subdominios con desplazamientos preescritos suficientes, como para suprimir los movimientos de sólido rígido y  $N_{SF}$  al total de subdominios flotantes.

<sup>2</sup> Los superíndices ( $S$ ) y ( $f$ ) corresponden a los subdominios que pertenecen a  $N_{SP}$  y  $N_{SF}$  respectivamente.

<sup>3</sup> Todas las operaciones que poseen los superíndices ( $S$ ) o ( $f$ ) requieren un bucle o sobre los  $N_{SP}$  subdominios prescritos o los  $N_{SF}$  subdominios flotantes, según sea el caso.

---

## 2.6 Validación del método

### 2.6.1 Patch test

El “*patch test*” o criterio de la parcela, ha sido utilizado en este trabajo para verificar la correcta transferencia de información a través de la interfaz, en un problema de tensión uniforme.

Para comenzar, sobre un cuadrado de longitud  $L = 20\text{m}$  sometido a deformación plana, de propiedades elásticas conocidas, se aplicaron las condiciones de contorno mostradas en la Figura 2.14. Se llevaron a cabo los cálculos teóricos para conocer el estado tensional final del cuadrado elástico, partiendo del siguiente modelo constitutivo:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1} \quad (2.85)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\sigma_x = -12115.384615 \text{ Pa} \quad \text{y} \quad \sigma_y = -28269.230768 \text{ Pa} \quad (2.87)$$

Con la finalidad de comparar con los resultados obtenidos en (2.87), se llevaron a cabo diversas simulaciones numéricas. Las discretizaciones utilizadas se observan en la Figura 2.14 y fueron escogidas para verificar:

- La correcta transferencia de información a través de una interfaz en diagonal.
- La inexistencia de diferencias en los resultados, al escoger mallas no coincidentes con tamaños de elementos símiles y disímiles.

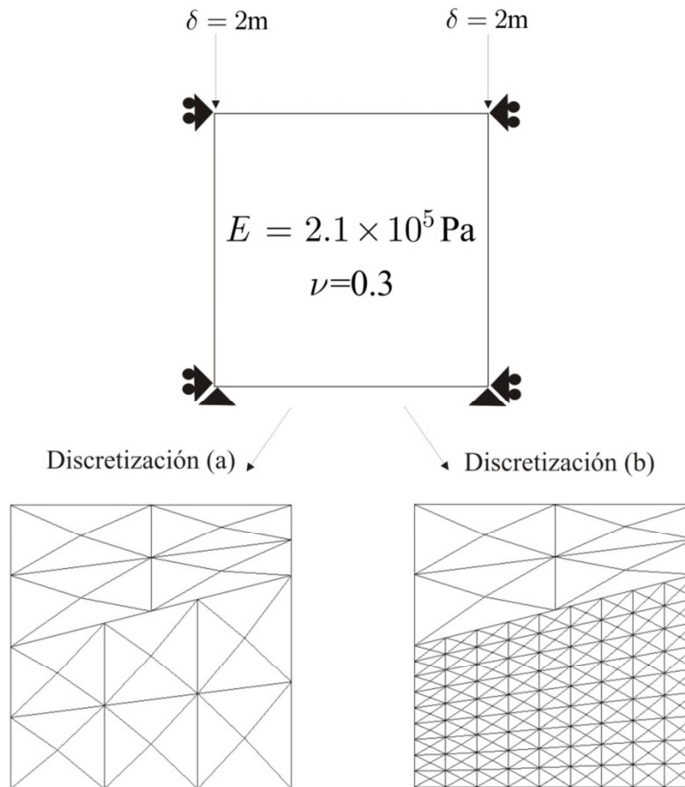


Figura 2.14: Criterio de la parcela A, aplicado sobre dos discretizaciones distintas.

Tal y como se puede observar en la Figura 2.15 y Figura 2.16, los resultados numéricos para las discretizaciones (a) y (b) muestran correspondencia con los resultados teóricos mostrados en (2.87). Adicionalmente, se observa que los resultados numéricos en cualquier punto dentro de los subdominios o sobre la interfaz, alcanzan prácticamente el orden de precisión de la máquina.

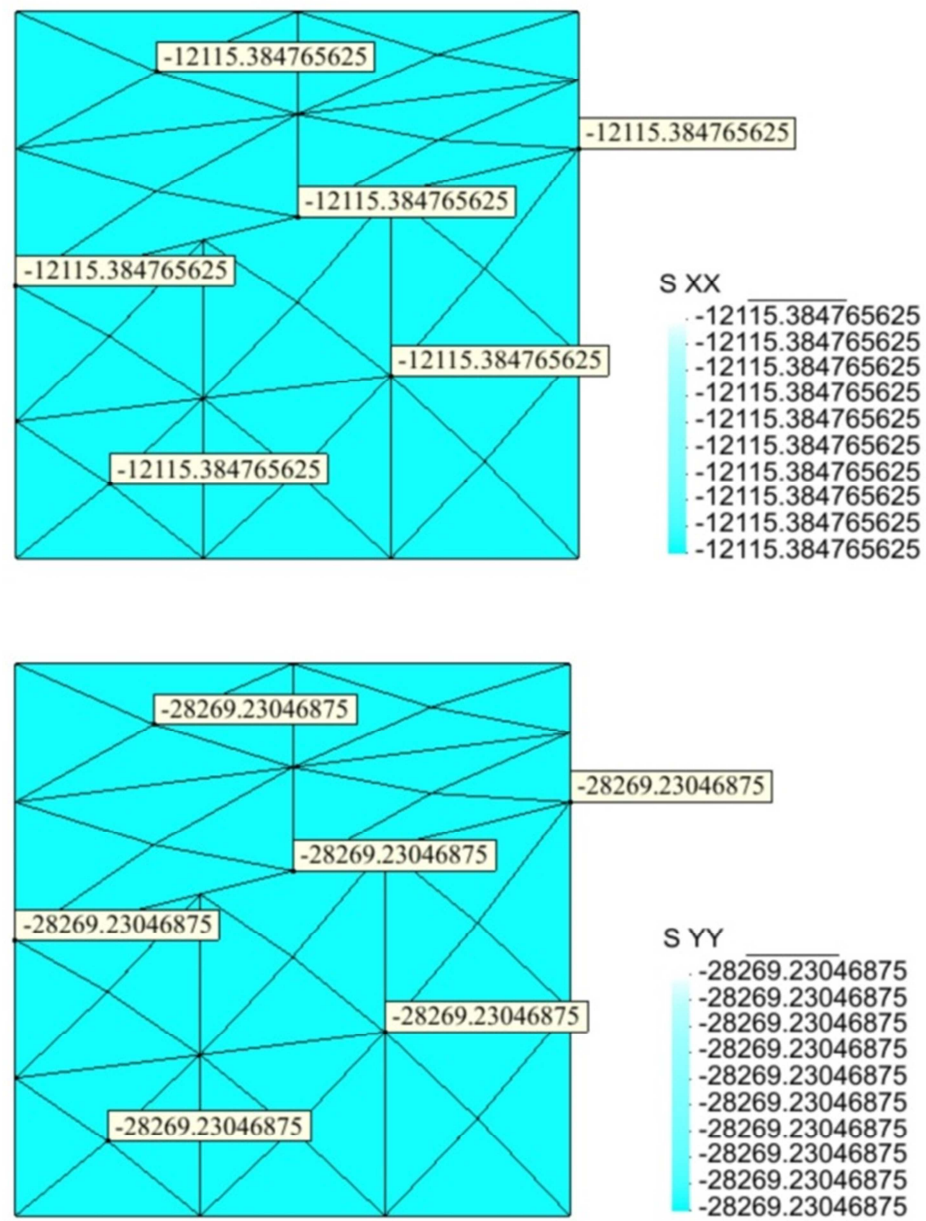


Figura 2.15: Resultados numéricos de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  para la discretización (a).

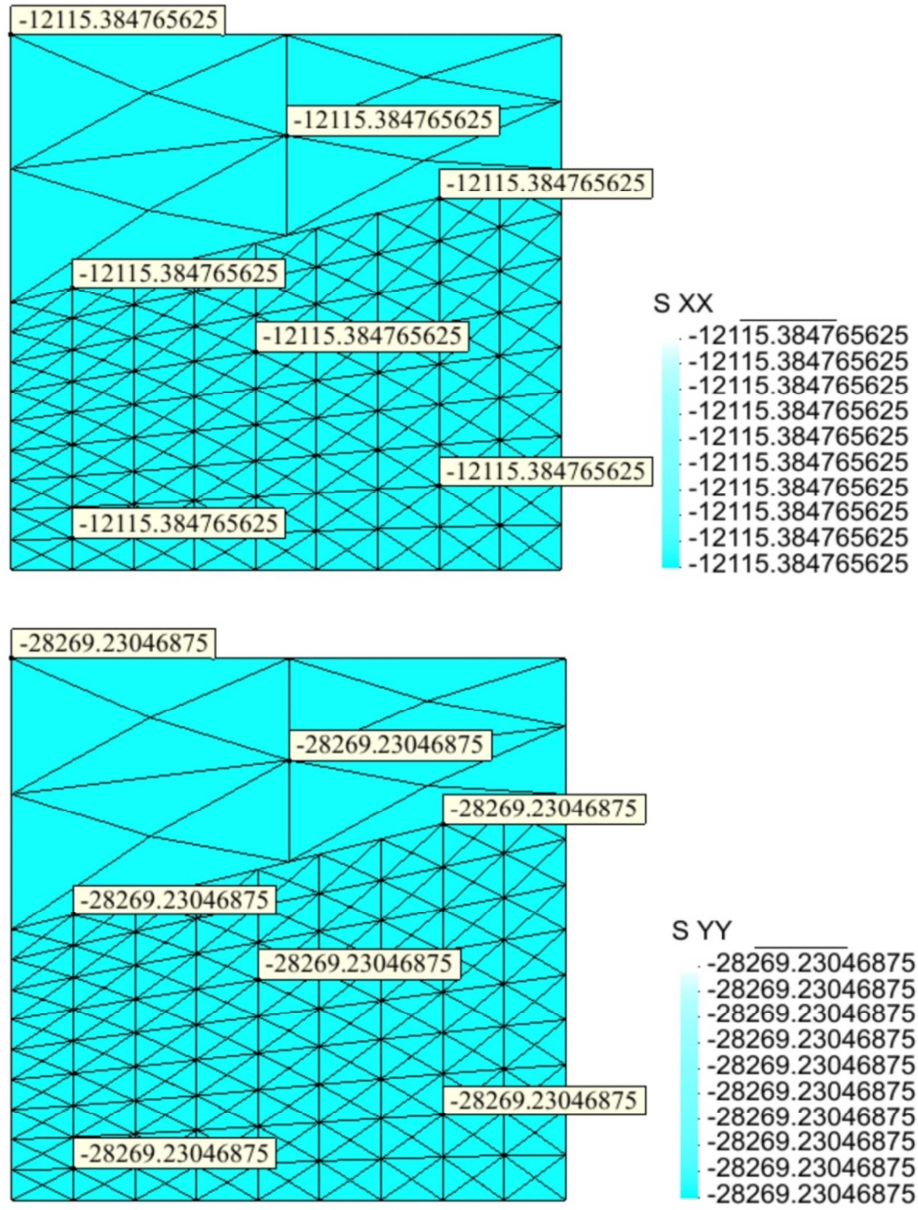


Figura 2.16: Resultados numéricos de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  para la discretización (b).



De esta manera, se confirma la convergencia del método, el correcto funcionamiento de la interfaz, su robustez y su precisión.

### 2.6.1.1 Patch test con subdominios flotantes

De la misma manera que en el caso anterior, se formuló el criterio de la parcela (B) pero esta vez sobre un cuadrado de longitud  $L = 30\text{m}$ , particionado en 9 subdominios, con mallas no coincidentes y con la presencia de un subdominio flotante:

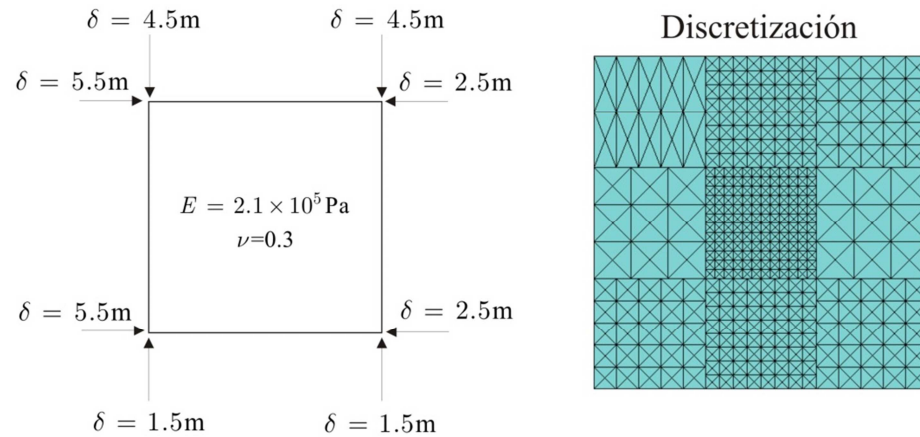


Figura 2.17: Criterio de la parcela B, aplicado sobre un cuadrado particionado en 9 subdominios.

Aplicando sobre el cuadrado de dimensiones y propiedades conocidas (Figura 2.17), el tensor de deformaciones presentado en (2.88) y con las constantes de Lamé vistas en (2.86).

$$\epsilon = \begin{bmatrix} -\frac{\delta_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\delta_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

El estado tensional teórico final corresponde a:

$$\sigma_x = -99615.384615 \text{ Pa} \quad \text{y} \quad \sigma_y = -88846.153846 \text{ Pa} \quad (2.89)$$

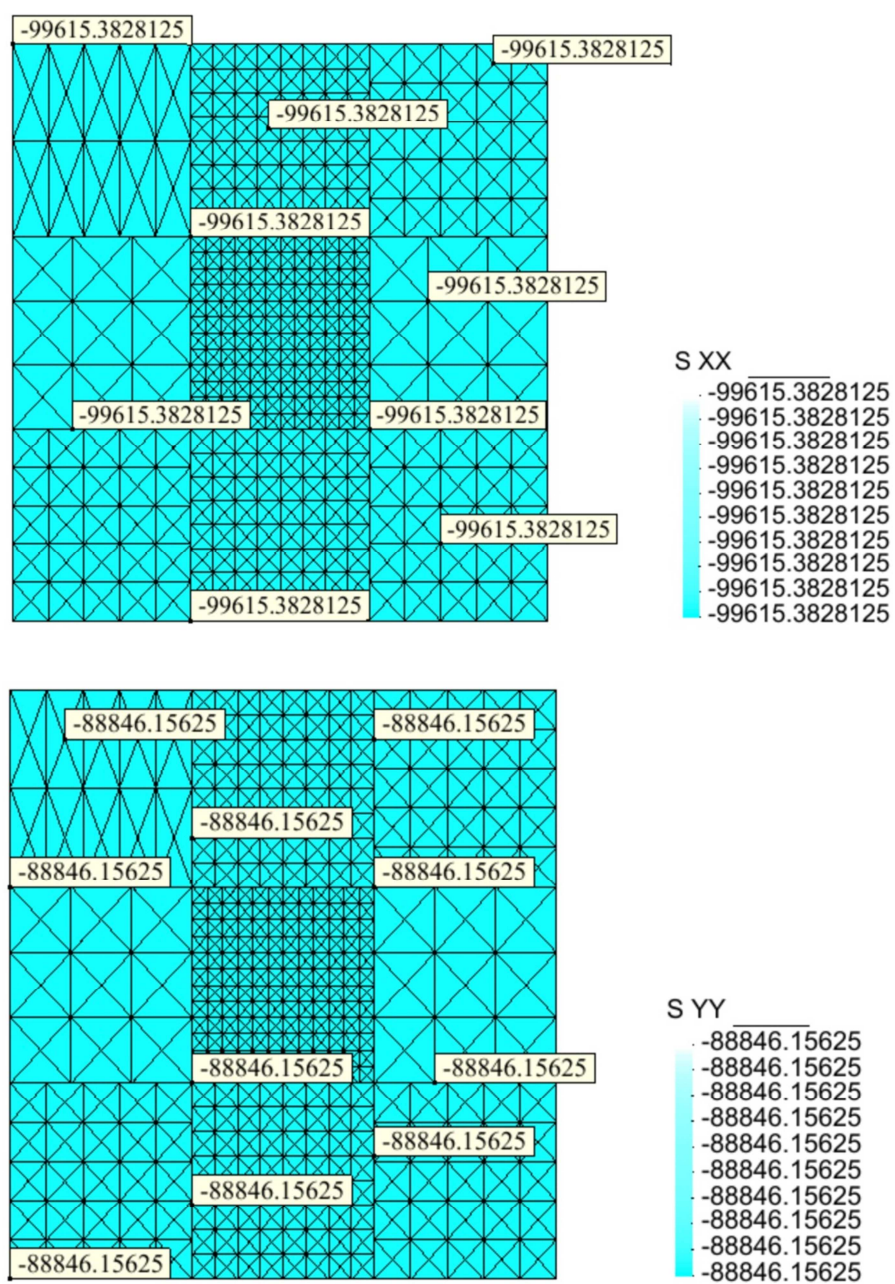


Figura 2.18: Criterio de la parcela B, aplicado sobre un cuadrado particionado en 9 subdominios.

Observando los resultados teóricos (2.89) y los numéricos (Figura 2.18), se verifica nuevamente el criterio de la parcela y se comprueba que aun y cuando existen subdominios flotantes, los resultados numéricos siguen alcanzando prácticamente el orden de precisión de la máquina.

Con esto, se demuestra que la presencia de subdominios flotantes y su resolución mediante la técnica presentada en el apartado 2.5 no introduce ningún tipo de error sobre los resultados finales de la simulación.

Adicionalmente, con el criterio de la parcela B, es interesante observar cómo se lleva a cabo la generación de las interfaces cuando existen subdominios en forma de cruz.

En la Figura 2.19, se presenta el cuadrado particionado en 9 subdominios, discretizados y conectados antes del proceso de contracción de la malla, con la finalidad de observar las mallas generadas y demostrar que la técnica propuesta garantiza una correcta transferencia de la información, haciendo sólo contacto unilateral entre cada uno de los subdominios, sin tener en cuenta las esquinas de cada uno de ellos.

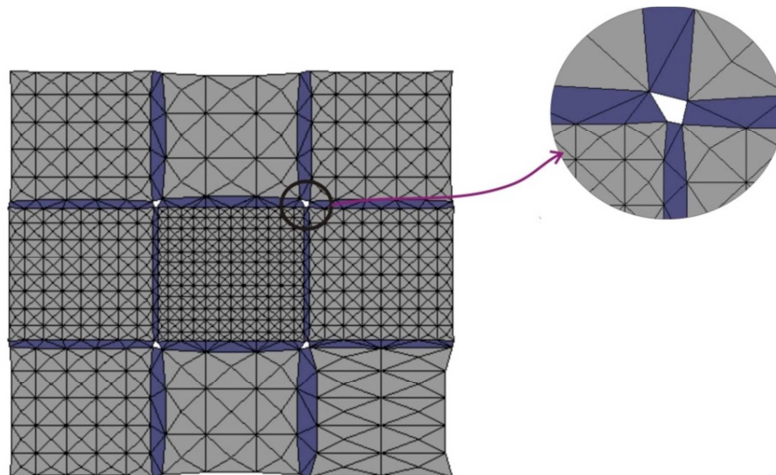


Figura 2.19: Generación de interfaces entre subdominios en forma de cruz.

### 2.6.2 Viga en Cantilever

La segunda verificación llevada a cabo en este trabajo, se fundamenta en un ensayo propuesto por (Herry, y otros, 2002) y se basa en el estudio de una viga en catilever.

El objetivo de este ejemplo es el de comparar la técnica presentada (MSI), con el método de mortero y con el de descomposición de dominios dual. Esta comparación se llevará a cabo tomando en cuenta el valor teórico de deflexión alcanzado por la viga en  $x = L$  y la deflexión obtenida numéricamente en una viga particionada en dos subdominios con mallas no coincidentes.

Para comenzar, la estructura analizada corresponde a una viga en cantilever con las siguientes condiciones de contorno:

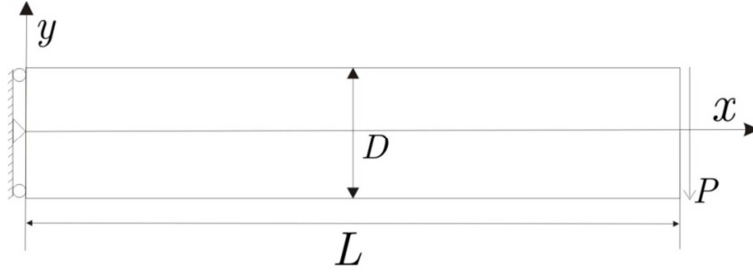


Figura 2.20: Análisis de una viga en cantilever.

Este problema ha sido ampliamente estudiado en la literatura, y su solución exacta dada por (Timoshenko, y otros, 1970) se resume en las siguientes expresiones, siendo  $u$  y  $v$  los desplazamientos en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$u = \frac{Py}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \bar{\nu}) \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (2.90)$$

$$v = \frac{-P}{6EI} \left[ (3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (2.91)$$

$$\sigma_x = \frac{P(L - x)y}{I} \quad (2.92)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (2.93)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left( y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \quad (2.94)$$

Donde  $P$  denota la fuerza aplicada,  $I = D^3/12$  el momento de inercia de la viga y para el caso tensión plana  $\bar{E} = E$  y  $\bar{\nu} = \nu$ , mientras que en problemas de deformación plana  $\bar{E} = E/(1 - \nu^2)$  y  $\bar{\mu} = \nu/(1 - \nu)$ .

La viga que se resolverá en este caso, corresponde a una viga en deformación plana, con las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ \nu = 0.3 \\ L = 10m \\ D = 1m \\ P = 2 \times 10^6 \text{ N} \end{array} \right.$$

A partir de la expresión (2.91), se puede obtener la deflexión teórica máxima ( $w_t$ ) alcanzada por la viga en  $x = L$ :

$$w_t = -0.03493285714286 \text{ m} \quad (2.95)$$

Por su parte, para la simulación numérica la viga fue particionada en dos subdominios, cada uno de longitud  $L_S = L/2$ .



Figura 2.21: Viga en cantilever particionada en subdominios.

Las discretizaciones utilizadas en cada uno de los subdominios fueron las siguientes:

- $\Omega_1$  1960 elementos ( $70 \times 14$  divisiones).
- $\Omega_2$  4840 elementos ( $110 \times 22$  divisiones).

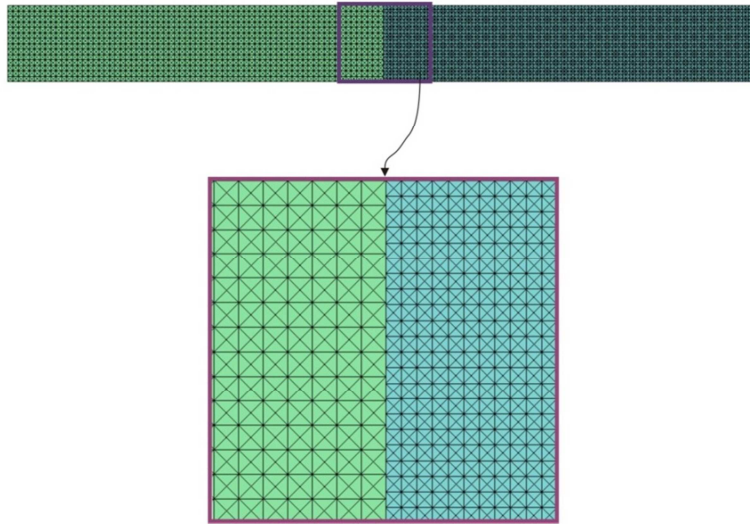


Figura 2.22: Discretización de la viga en cantilever.

En la Figura 2.22, se observa que el número de divisiones existentes en cada uno de los subdominios a lo largo de la interfaz corresponden a: 14 divisiones en  $\Omega_1$  y 22 en  $\Omega_2$ . Como las simulaciones presentadas en el ejemplo propuesto por (Herry, y otros, 2002) se llevaron a cabo con elementos cuadriláteros, y las de este trabajo con elementos triangulares, para el mismo número de divisiones nuestra discretización presentará una mayor cantidad de elementos por subdominio.

Sin embargo, como las divisiones o números de elementos a lo largo de la interfaz son los que definirán su discretización y el número de multiplicadores de Lagrange que se dispondrán a lo largo de ésta, a fin de evaluar la interfaz con sus " $\lambda$ " e intentar reproducir el ensayo, se mantuvo el número de divisiones iguales, a costa de tener un número de elementos diferentes.

En cuanto a las condiciones de contorno utilizadas, tal y como se muestra en las relaciones (2.90) y (2.91), éstas no corresponden exactamente a las de una viga empotrada en la coordenada  $x = 0$ , la magnitud de estos desplazamientos se muestran en los gráficos presentados a continuación:

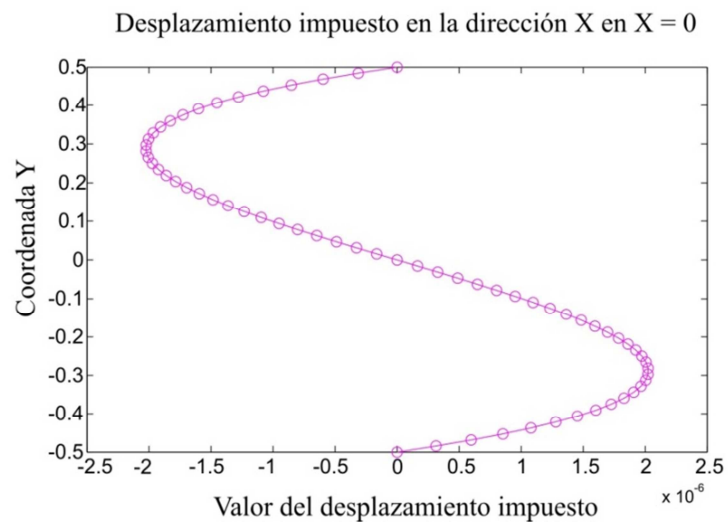


Figura 2.23: Desplazamientos impuestos en la dirección  $x$  en  $x = 0$ .

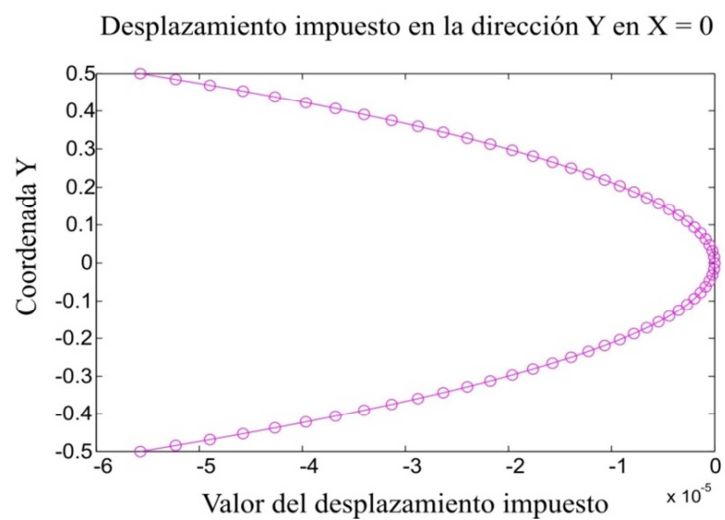


Figura 2.24: Desplazamientos impuestos en la dirección  $y$  en  $x = 0$ .



Con los ingredientes antes descritos, la simulación numérica arrojó el siguiente resultado de deflexión máxima:

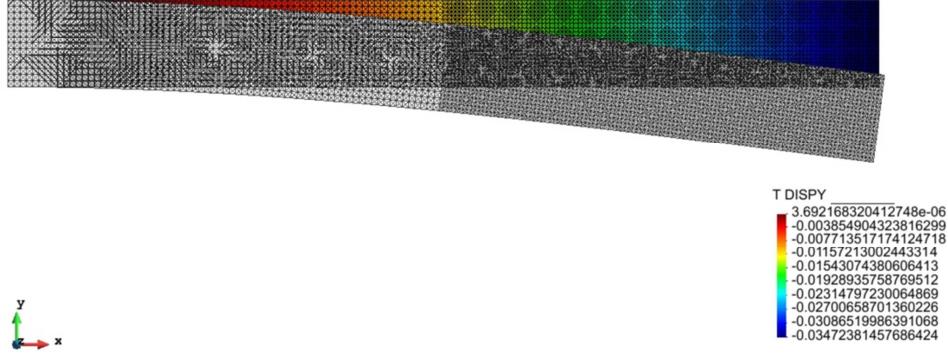


Figura 2.25: Resultados de la máxima deflexión alcanzada en  $x = L$ .

En la Figura 2.25, se observa que la deflexión máxima alcanzada por la viga en  $x = L$  corresponde a:

$$w_n = -0.03472381457686424 \text{ m} \quad (2.96)$$

A partir de este resultado y basándonos en los resultados expuestos por (Herry, y otros, 2002), con la misma discretización a lo largo de la interfaz, se puede presentar una tabla comparativa que muestra el alcance del método propuesto y el de otros métodos como por ejemplo: el de mortero (Bernardi, y otros, 1993) y el (DDD) descomposición de dominios dual (Herry, y otros, 2002).

Tabla 2.1: Porcentaje máximo de deflexión, comparación con otros métodos.

	Método de mortero burdo	Método de mortero fino	Método DDD	Método propuesto
Número de $\lambda$	15	23	35	36
$\frac{w_n}{w_t} \times 100$	79.06%	99.86%	99.84%	99.40%

En la Tabla 2.1, se observa que el resultado arrojado por el método propuesto (MSI), muestra un alcance que se encuentra al nivel, de métodos alternativos como por ejemplo el método de mortero de malla fina y el de descomposición de dominios dual.



Por otra parte, estos resultados ponen en manifiesto la observación 2.2 que menciona que cuando el método de mortero escoge la discretización más burda como superficie  $\gamma$  los resultados finales pueden verse afectados a nivel de precisión (ver apartado 2.2.1.1). En nuestro caso, este hecho queda solventado por el doble chequeo que se realiza de forma natural sobre la integral (2.4).

En cuanto al número de multiplicadores de Lagrange utilizado por cada método, en el método propuesto (MSI) la cantidad de multiplicadores de Lagrange corresponde al número de parcelas que conforman la malla de interfaz. En la figura a continuación, se puede observar la malla de la interfaz durante el proceso de contracción de los subdominios:

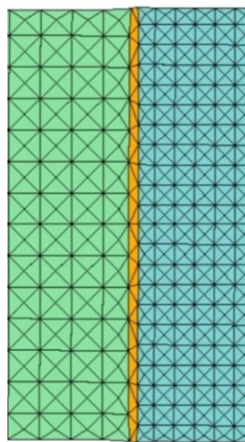


Figura 2.26: Imagen ampliada de la interfaz generada entre subdominios, para la disposición de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ .

### 2.6.3 Análisis de convergencia

En este apartado, se llevará a cabo un test numérico para verificar la velocidad de convergencia del método. Partiendo de un ejemplo propuesto por (Girault, y otros, 2009) se considera nuevamente una viga en 2D de longitud  $L$  y ancho  $2c$ , empotrada en uno de sus extremos, ver Figura 2.27.

Las propiedades mecánicas de la viga son: módulo de Young  $E = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  y constantes de Lamé:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.97)$$

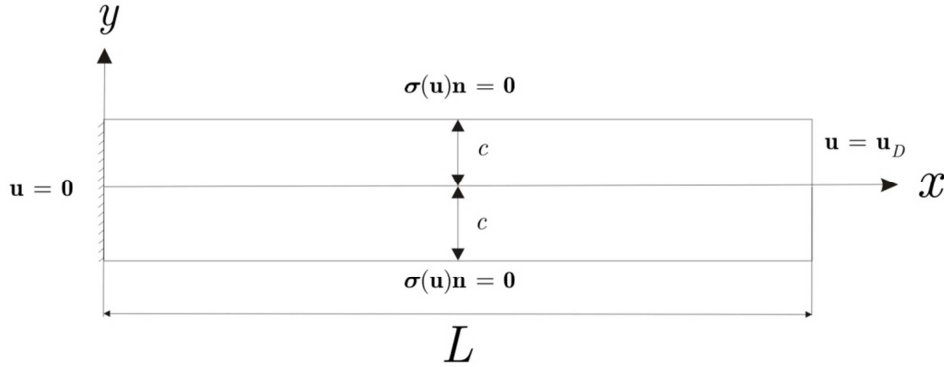


Figura 2.27: Geometría y condiciones de contorno de la viga (Girault, y otros, 2009).

En cuanto a las condiciones de contorno, un desplazamiento homogéneo ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) es impuesto en  $x = 0$ , al igual que sobre la parte superior e inferior de la viga en  $y = \pm c$  una tracción homogénea  $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . El problema se resuelve a partir de un campo de desplazamientos conocido y que será utilizado para prescribir las condiciones en  $x = L$  haciendo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_D$ .

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3\alpha x^2 y \\ \alpha x^3 + \frac{3\alpha\lambda}{\lambda + 2\mu} x(y^2 - c^2) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Las fuerzas aplicadas sobre la viga vienen dadas por el vector:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 6\alpha\mu \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Siendo  $L = 10m$ ,  $c = 0.5m$  y  $\alpha = -1 \times 10^{-3} m^{-2}$  constantes, la viga se dividió en 10 subdominios a lo largo de la dirección  $x$ . Cada uno de estos subdominios fueron discretizados de forma alternada comenzando con  $4 \times 4$  y  $6 \times 6$  divisiones y a partir de allí, se comenzó a disminuir el

tamaño de los elementos. La discretización inicial puede ser observada en la Figura 2.28:

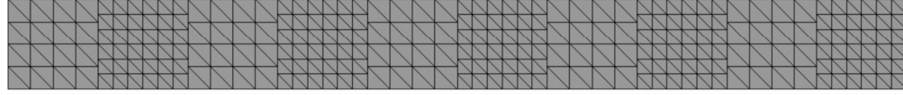


Figura 2.28: Primera discretización de la viga, con tamaños de malla de  $4 \times 4$  y  $6 \times 6$  de forma alternada entre subdominios.

Los distintos tamaños de malla utilizados fueron:  $4/6$ ,  $8/12$ ,  $16/24$  y  $32/48$ . Para cada una de estas discretizaciones se llevó a cabo la medida del error generado por la interfaz (*error del salto*) y que corresponde a la diferencia entre los desplazamientos entre subdominios a lo largo de la interfaz.

### 2.6.3.1 Medidas del error

$$error = |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{X_h} + \left( \sum_{i=1}^2 (\lambda + 2\mu) (\mathbf{B}_{1,i} + \mathbf{B}_{2,i}) \right)^{1/2} \quad (2.100)$$

Con:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{X_h} \\ \mathbf{B}_{1,i} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{h,i}} \frac{\sigma_\gamma}{h_\gamma} \|\mathbf{u}_{h,i} - \mathbf{u}_D\|_{L^2(\gamma)}^2 \\ \mathbf{B}_{2,i} &= \sum_{\tau \in \mathcal{E}_H} \frac{\sigma_\tau}{h_\tau} \|\mathbf{u}_{h,i} - \lambda_H\|_{L^2(\tau)}^2 \end{aligned} \quad (2.101)$$

En la expresión (2.100) se observa la medida del error utilizada por (Girault, y otros, 2009). Ésta, corresponde básicamente a una medida de los saltos de la variable de los desplazamientos en cada una de las zonas en las cuales trabaja la interfaz (Girault, y otros, 2009).

En el método del salto (Girault, y otros, 2009), en un dominio  $\Omega$  particionado en los dominios  $\Omega_i$  con  $i = 1, 2$ , se define para  $i = 1, 2$  el conjunto de elementos que se encuentran en las proximidades de  $\Gamma_{12}$

denominado  $O_i$  (ver Figura 2.29). Igualmente, se define  $\tilde{\Omega}_i$  como el set de elementos restantes sobre  $\Omega_i$ , que se obtiene al suprimir los correspondientes a  $O_i$ .

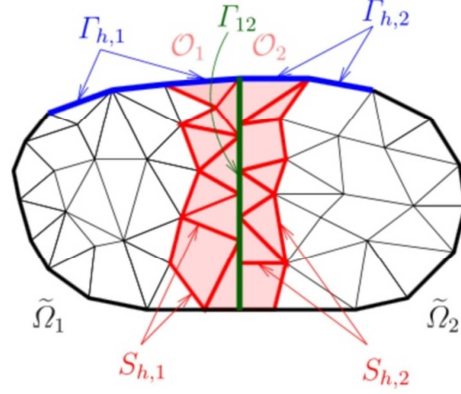


Figura 2.29: Partición de dominios y definición de espacios en la técnica de (Girault, y otros, 2009).

Los desplazamientos definidos sobre el espacio  $X_h := \{\mathbf{u}_h \in L^2(\Omega)\}$  son una función a trozos que existe sobre cada uno de los elementos, y que son continuos sobre  $\tilde{\Omega}_i$  pero a los que se les permite ser discontinuos sobre  $O_i$ .

De esta manera en la expresión (2.101), el término  $\mathbf{A}$  mide la norma del error del salto sobre  $X_h$  debido a la discontinuidad que podrían presentar los desplazamientos sobre  $O_i$ . Los términos  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$ , corresponden a la norma  $L_2$  del error en desplazamientos sobre la superficie de contorno prescrita y sobre la interfaz medida a través de los multiplicadores de Lagrange, respectivamente.

Así, para poder evaluar la velocidad de convergencia del método propuesto y compararla con el método del salto, se propone llevar a cabo la medición de la norma  $L_2$  de la diferencia en los desplazamientos entre subdominios a través de la interfaz, con lo cual, la medida del error propuesta viene dada por la siguiente expresión:

$$\|[\mathbf{u}]\|_{L_2} = \left( \int_0^l (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.102)$$

Donde  $[\mathbf{u}]$  corresponde al salto del campo de los desplazamientos entre subdominios,  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{u}_j$  a los desplazamientos nodales de cada uno de los subdominios que se encuentran sobre la interfaz y  $l$  a la longitud total de la interfaz.

En cuanto a la integral (2.102) su resolución se llevó a cabo mediante cuadratura de Gauss, tomando dos puntos de Gauss por cada elemento lineal definido por los nodos que se encuentran ubicados sobre la interfaz.

### 2.6.3.2 Comparación de resultados

Los resultados expuestos a continuación, corresponden a la velocidad de convergencia presentada por el método propuesto (MSI) y el método del salto presentado por (Girault, y otros, 2009). Aunque las curvas no serán superpuestas ya que las medidas del error no son las mismas, y por lo tanto, no son comparables, permiten verificar la convergencia del método propuesto.

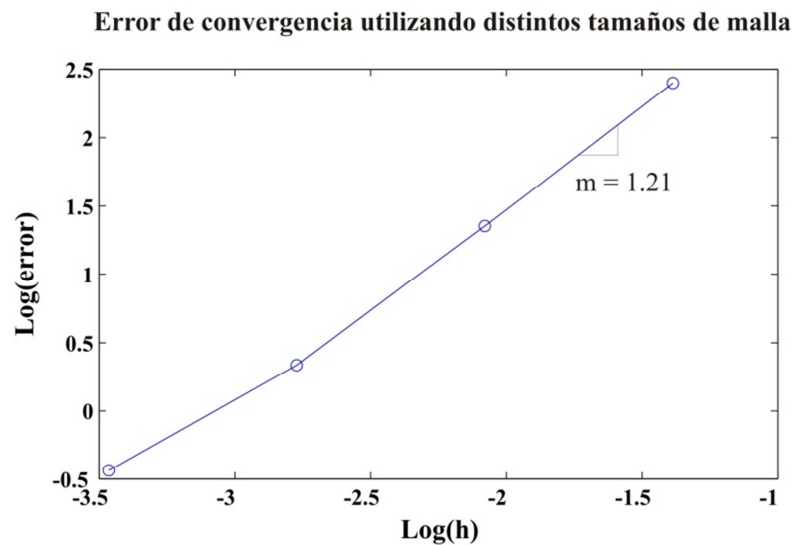


Figura 2.30: Velocidad de convergencia para distintos tamaños de mallas triangulares lineales para el método del salto (Girault, y otros, 2009).

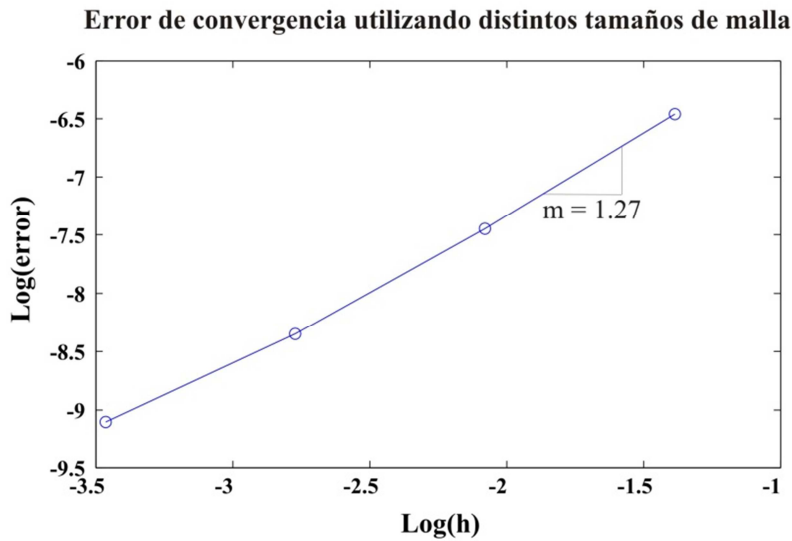


Figura 2.31: Velocidad de convergencia para distintos tamaños de mallas triangulares lineales para el método propuesto (MSI).

Los resultados en ambos de los casos corresponden a los arrojados por elementos triangulares lineales. Sin embargo, la velocidad de convergencia en ambos, es menor a la convergencia cuadrática esperada<sup>1</sup> en simulaciones con este tipo de elementos.

Adicionalmente en las figuras a continuación, se puede observar la correcta transmisión de información a través de la interfaz de ambos métodos:

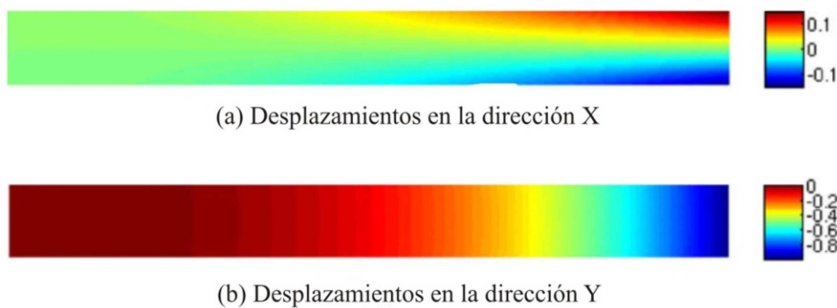


Figura 2.32: Desplazamientos en la dirección X e Y del método del salto (Girault, y otros, 2009),

<sup>1</sup> La menor velocidad de convergencia podría atribuirse a la introducción de la interfaz, que si bien logra llevar a cabo una correcta transmisión en tensiones y deformaciones, siempre generará un margen error al ser introducida en el sistema

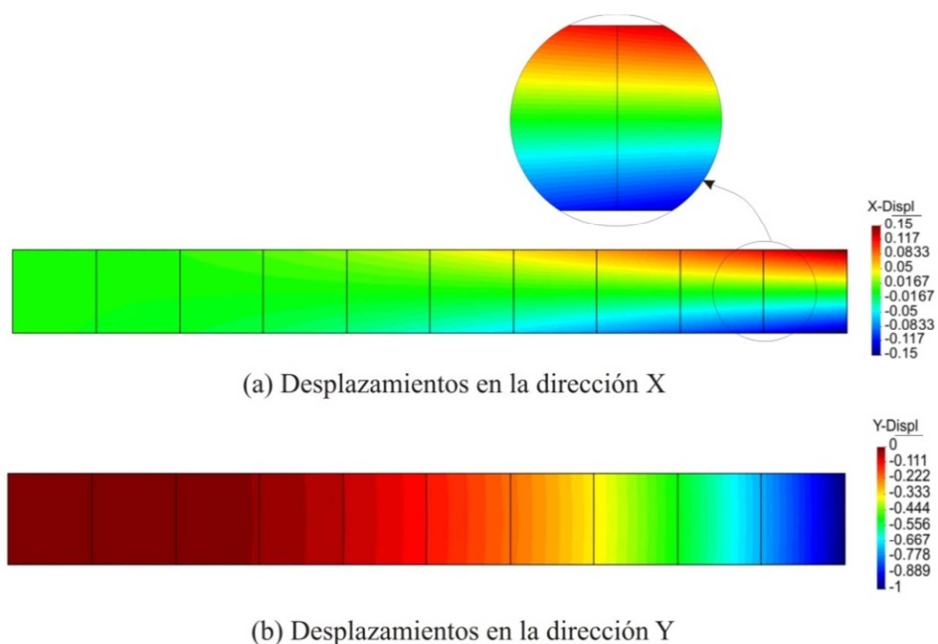


Figura 2.33: Desplazamientos en la dirección X e Y del método propuesto (MSI), para una viga particionada en subdominios, con malla refinada y con elementos triangulares lineales.

### 2.6.3.3 Influencia de la cantidad de elementos perturbados, sobre el comportamiento de los subdominios flotantes.

Otro análisis ya comentado en el apartado 2.5.1, corresponde a la evaluación de la influencia de la cantidad de elementos estabilizadores de la interfaz, sobre el comportamiento de los subdominios flotantes.

Para esto, sobre uno de los subdominios flotantes de la viga presentada en la Figura 2.28, se llevó a cabo la medición del error (2.102) para diferentes tamaños de mallas, variando el número de elementos estabilizadores escogidos sobre la interfaz (ver Figura 2.34).

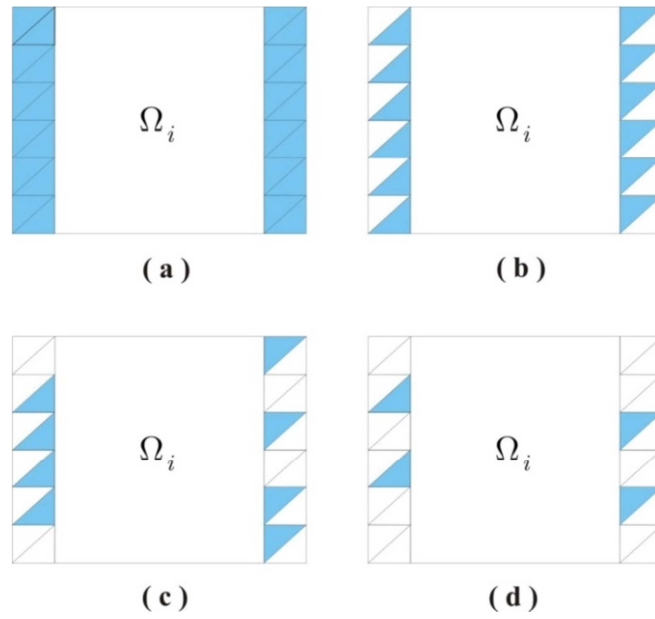


Figura 2.34: Variación del número de elementos estabilizadores de la interfaz “configuraciones”: (a) Configuración A = 100% de los elementos, (b) Configuración B = 50% de los elementos, (c) Configuración C = 4 elementos y (d) Configuración D = 2 elementos.

Las diferentes variaciones del error (2.102) con el tamaño de malla ( $h$ ) y el tipo de configuración puede observarse en la Figura 2.35. Adicionalmente, se puede observar una dependencia directa entre el número de elementos estabilizadores de la interfaz y la magnitud del error. Cuando las discretizaciones de las mallas son más burdas, esta cantidad no afecta la magnitud del error, pero cuando las mallas comienzan a hacerse cada vez más finas, la cantidad de elementos estabilizadores comienza a hacerse importante, tanto, que hasta logra cambiar el signo de la velocidad de convergencia.

En la Figura 2.36, se observa consistentemente que a medida que la malla se hace más fina, pocos elementos estabilizadores hacen que la nueva matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_{dd}$  presente un aumento en su número de condición, lo que provoca la generación de una norma del error mayor, al ser invertida.



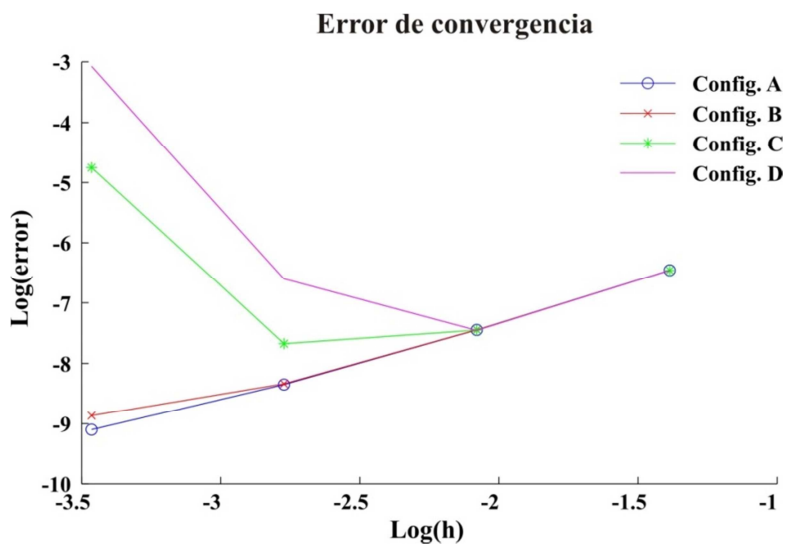


Figura 2.35: Variación de la magnitud del error, con el tamaño de malla y con el número de elementos estabilizadores sobre la interfaz.

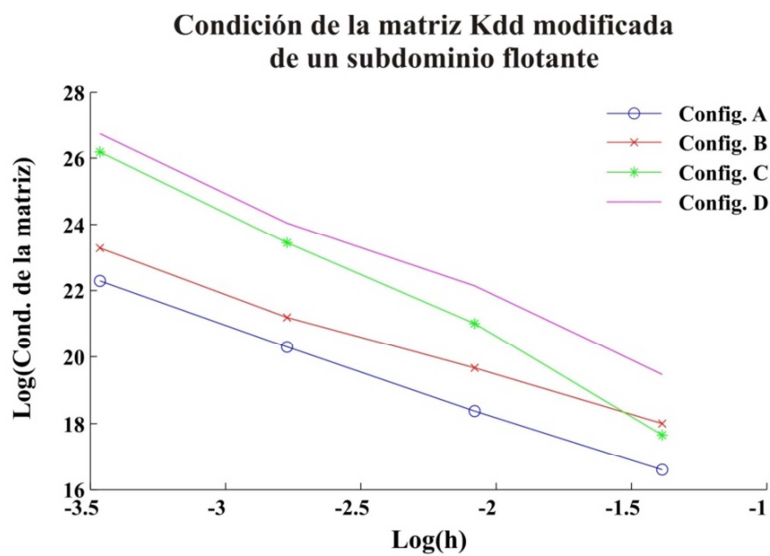


Figura 2.36: Variación de la condición de la matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_{dd}$  de un subdominio flotante, al variar el número de elementos estabilizadores de la interfaz.

## 2.7 Consideraciones Finales

El presente capítulo se inició con la descripción del método propuesto Subdominio de Interfaz (MSI). Se explicaron los aspectos geométricos del método, el procedimiento para la generación de la interfaz e incorporación de los multiplicadores de Lagrange y se introdujeron las ecuaciones globales de balance de energía, el principio de los trabajos virtuales, discretización, linealización, estabilización y resolución del problema mediante el método de las subestructuras.

En la segunda parte del capítulo, se mostró una técnica innovadora para la eliminación de movimientos de sólido rígido, necesaria en la resolución de problemas de partición de dominios con presencia de subdominios flotantes.

En la tercera y última parte del capítulo, se llevaron a cabo distintos test de validación y análisis de convergencia, a partir de los cuales se pudieron obtener las siguientes conclusiones:

- El método propuesto cumple con el “*patch test*” de forma satisfactoria, para discretizaciones con mallas no coincidentes y con la presencia de subdominios flotantes.
- Los resultados arrojados por el método propuesto, muestran un nivel de precisión y una velocidad de convergencia, comparable con métodos alternativos.
- Se verificó el correcto funcionamiento de la técnica para la eliminación de movimientos de sólido rígido y se observó la influencia de la cantidad de elementos perturbados, sobre su comportamiento.

En el apartado siguiente (Capítulo III), se muestran las modificaciones llevadas a cabo sobre la técnica presentada en este capítulo, con la finalidad de llevar a cabo simulaciones numéricas de problemas incompresibles, que requieren de formulaciones mixtas desplazamiento-presión.

## 3 Aplicación a formulaciones mixtas desplazamiento – presión

### 3.1 Formulación mixta para la resolución de problemas incompresibles

Es bien conocido que la formulación irreducible en desplazamientos, no es adecuada para la resolución de problemas en los que el comportamiento constitutivo del material exhibe incompresibilidad y por tanto, *bloqueo* (Bochev, y otros, 2008).

La formulación mixta desplazamiento-presión surge como una solución a este problema. Ésta, propone:

- Introducir el campo de las presiones ( $p$ ) como una variable adicional a determinar en el problema.
- Incorporar sobre el principio variacional (2.38), la descomposición del tensor de tensiones en sus respectivas componentes hidrostática y desviadora.

#### 3.1.1 Descripción del problema monolítico

##### 3.1.1.1 Forma fuerte del problema

Problemas de valores de contorno

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p(\mathbf{x}_n) : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.1)$$

SATISFACIENDO:

Ecuación de equilibrio:

$$DIV \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{b} \text{ en } \Omega_n \quad (3.2)$$

Ecuación constitutiva de la presión:

$$\frac{p}{\kappa} = \frac{\ln(J)}{J} \text{ en } \Omega_n \quad (3.3)$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u \quad (3.4)$$

Condiciones de contorno de Neumann:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}} \text{ en } \Gamma_\sigma \quad (3.5)$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}$  corresponde al tensor de tensiones de Cauchy y  $\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}$  a las expresiones vectoriales definidas previamente en el apartado 2.3.1.1,  $p$  corresponde a la presión,  $J = \det \mathbf{f}$  se define como el determinante del tensor gradiente de la deformación y  $\kappa$  como el módulo de compresibilidad del material.

**Observación 3.1** Nótese que la ecuación (3.1) se resolverá de forma desacoplada, con lo cual, el tensor de tensiones puede escribirse en sus componentes volumétrica y desviadora de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \nabla p = -\mathbf{b} \quad (3.6)$$

Con  $p = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  y  $\mathbf{S} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$ .

**Observación 3.2** La ecuación adicional (3.3) corresponde a la ecuación constitutiva de la presión propuesta para un modelo “*Neo-Hookean Hyperelastic*” (Bonet, y otros, 1997).

### 3.1.1.2 Forma débil del problema

#### Principio de los trabajos virtuales

Partiendo de los espacios  $U$  y  $V$  definidos en la expresión (2.36):

$$\begin{aligned} U &:= \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_u \right\} \text{ y} \\ V &:= \left\{ \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \delta \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Y tomando en cuenta que la variable presión ( $p$ ) y su respectiva variación ( $\delta p$ ), pertenecen al espacio  $L^2(\Omega)$  de funciones de cuadrado integrables:

$$p \in L^2(\Omega) \text{ y } \delta p \in L^2(\Omega) \quad (3.8)$$

Dados los desplazamientos prescritos ( $\hat{\mathbf{u}}$ ), las cargas exteriores ( $\hat{\mathbf{t}}$ ) y las fuerzas másicas ( $\mathbf{b}$ ), el problema se reduce a encontrar el campo de los desplazamientos y de las presiones  $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que satisfagan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((\mathbf{S} + p\mathbf{1}) : \text{GRAD}(\delta \mathbf{u})) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega} \delta p \left( \frac{\ln(J)}{J} - \frac{1}{\kappa} p \right) d\Omega = 0 \quad \forall \delta p \in L^2(\Omega) \quad (3.10)$$

Siendo la integral (3.10) la forma débil de la ecuación constitutiva de la presión presentada en (3.3).

### 3.1.2 Estabilización vía el método PPP

En las formulaciones mixtas, cuando se utilizan elementos finitos lineales en desplazamientos y presión en la simulación de materiales incompresibles o en la cercanía de incompresibilidades, ( $\nu = 0.5$  o  $\nu \approx 0.5$ ) el campo de las presiones presenta oscilaciones. Estas oscilaciones carecen de sentido físico y matemáticamente indican que un mismo orden de interpolación para los desplazamientos y las presiones no satisface la condición Babuska-Brezzy (Rodriguez, 2014).

Con el fin de eliminar estas oscilaciones, en la literatura se presentan diferentes estrategias para la estabilización: *Characteristic Based Split* (CBS) (Chorin, 1997), *Finite Calculus* (FIC) (Oñate, y otros, 2004), *Orthogonal Subgrid Scales* (OSS) (Agelet de Saracibar, y otros, 2006), *Polynomial Pressure Projection* (PPP) introducida por (Dohrmann, y otros, 2004) y (Bochev, y otros, 2008), entre otros.

En este trabajo se utilizará la estrategia de estabilización *Polynomial Pressure Projection* (PPP) introducida por (Bochev, y otros, 2008), la cual, tiene varios aspectos relevantes:

- No requiere de la aproximación de derivadas o la especificación de parámetros dependientes del tamaño de malla.
- Es incondicionalmente estable, óptimamente precisa y siempre conduce a problemas simétricos.
- Su implementación depende de operadores cuya acción puede ser evaluada a nivel local dentro de cada elemento, razón por la cual, su implementación es poco invasiva en un código ya existente.

De esta manera, para estabilizar el problema (3.9) y (3.10), la técnica PPP propone adicionar el operador de proyección (3.11) a la forma débil de la condición cinemática de incompresibilidad (3.10):

$$\int_{\Omega} \frac{\beta}{\mu} (p - \bar{p})(\delta p - \delta \bar{p}) d\Omega \quad (3.11)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) \\ \delta \bar{p} &= \frac{1}{3}(\delta p_1 + \delta p_2 + \delta p_3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde  $\beta$  corresponde al parámetro de estabilización,  $\mu$  al módulo de cizalladura y  $p_1, p_2$  y  $p_3$  a las respectivas presiones nodales del elemento mixto.

La aplicación del operador de proyección sobre el problema planteado en (3.9) y (3.10) contribuye a la eliminación de la inconsistencia que se genera en los problemas mixtos, al trabajar con desplazamientos y presiones del mismo orden (Bochev, y otros, 2008).

## 3.2 Formulación mixta para la resolución de problemas incompresibles dentro del método de partición de dominios

Partiendo de un dominio continuo  $\Omega$ , particionado en  $N_S$  subdominios  $\Omega_S$  con sus respectivas discretizaciones e interfaces de conexión entre ellos, las modificaciones en el tratamiento de la interfaz para incorporar la formulación mixta desplazamiento-presión, serán las siguientes:

### 3.2.1 Incorporación del multiplicador de Lagrange para la transferencia de las presiones

Al introducir una nueva variable en el problema ( $p$ ), la continuidad en presiones a través de la interfaz se lleva a cabo a partir de un nuevo multiplicador de Lagrange denominado ( $\lambda_p$ ). Éste, al igual que  $\lambda_N$  y  $\lambda_T$  se encuentra ubicado en el interior de cada una de las parcelas  $D_n^q$  que conforman la interfaz (ver Figura 3.1). Y tal y como se verá más adelante en el apartado 3.2.3, será forzado de forma débil a anularse sobre la superficie  $\Gamma_S$ .

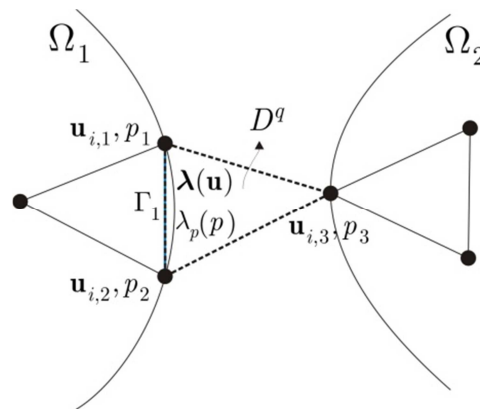


Figura 3.1: Incorporación del multiplicador de Lagrange  $\lambda_p$  para la transferencia de la presión a través de la interfaz.

### 3.2.2 Definición del gap de las presiones

#### 3.2.2.1 Gap geométrico de la presión

Se define el gap  $g_p \in \Omega_n$  como el gradiente de la presión, proyectado sobre el vector normal  $\mathbf{N}_q$  al lado base de la parcela triangular (ver Figura 3.2).

$$g_p = \frac{\partial p_q}{\partial \mathbf{N}_q} \quad (3.13)$$

**Observación 3.3** Tal y como se verá en el apartado 3.2.3 este gap será forzado de forma débil a anularse, garantizando que exista una correcta transferencia de información y que el salto en presiones  $\llbracket p \rrbracket = p_{\Omega_1} - p_{\Omega_2}$  en la dirección  $\mathbf{N}_q$  de cada parcela, tienda a ser nulo.

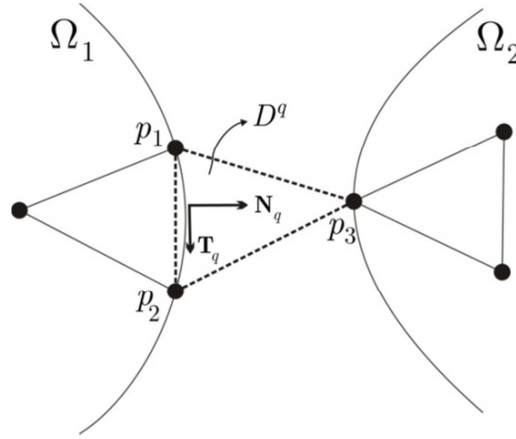


Figura 3.2: Valores de presiones nodales y vector normal  $\mathbf{N}_q \in \Gamma_S$ , necesarios para el cálculo de  $g_p$ .



### 3.2.3 Descripción del problema

#### 3.2.3.1 Forma fuerte del problema

Problema de valores de contorno

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_n) : D_n^S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda_p(\mathbf{x}_n, p) : D_n^S \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.14)$$

SATISFACIENDO:

Ecuación de equilibrio:

$$\text{DIV} \mathbf{P}_S = -\mathbf{b}_S \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (3.15)$$

Ecuación constitutiva de la presión:

$$\frac{p_S}{\kappa} = \frac{\ln(J_S)}{J_S} \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (3.16)$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u}_S = \hat{\mathbf{u}}_S \quad \text{en } \Gamma_{u,S} \quad (3.17)$$

Condiciones de contorno de Neumann:

$$\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N}_S = \hat{\mathbf{t}}_S \quad \text{en } \Gamma_{\sigma,S} \quad (3.18)$$

Identificación de los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \lambda_N = t_{N,S} \\ \lambda_T = t_{T,S} \quad \text{en } \Gamma_S \\ \lambda_p = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Condición de restricción:

$$\begin{cases} \bar{g}_N(\mathbf{u}) = 0 \\ \bar{g}_T(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } D_n \\ g_p(p) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

**Observación 3.4** Nótese que basándonos en la observación 3.1, el desacoplamiento de  $\sigma$  genera un desacoplamiento de  $\mathbf{P}$  en la expresión (3.15):

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= J\sigma\mathbf{f} \\ \mathbf{P} &= J(\mathbf{S} + p\mathbf{1})\mathbf{f}\end{aligned}\tag{3.21}$$

### 3.2.3.2 Forma débil del problema

#### Principio de los trabajos virtuales

Definidos los espacios  $U$  y  $V$  en (2.36), y teniendo en cuenta que  $(p_S)$ ,  $(\delta p_S)$  y  $(\lambda_p)$  pertenecen al espacio de funciones de cuadrado integrable tal que:

$$\begin{aligned}p_S &\in L^2(\Omega_S) \text{ y } \delta p_S \in L^2(\Omega_S) \\ \lambda_p &\in L^2(D)\end{aligned}\tag{3.22}$$

El problema consiste en encontrar los desplazamientos  $\mathbf{u}_S \in U$ , el campo de las presiones  $p_S \in L^2(\Omega_S)$  y los multiplicadores de Lagrange  $[\lambda, \lambda_p] \in L^2(D)$ , tal que satisfagan las siguientes expresiones  $\forall(\delta\mathbf{u}, \delta p) \in V \times L^2(\Omega_S)$ :

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\text{mec}}^{mix} &:= \delta\Pi_{\text{int,ext}}^{mix} + \delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{u}, \lambda, \delta\mathbf{u}) + \delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}(\lambda_p, \delta p) = 0 \\ \delta\Pi_{\text{incomp}} &:= \int_{\Omega_S} \delta p_S \left( \frac{\ln(J_S)}{J_S} - \frac{1}{\kappa} p_S \right) d\Omega_S = 0\end{aligned}\tag{3.23}$$

Donde  $\delta\Pi_{\text{int,ext}}^{mix}$  corresponde a las expresiones vistas en (2.39) teniendo en cuenta el desacoplamiento del primer tensor de Piola Kirchhoff  $\mathbf{P}_S$  visto en la ecuación (3.20). Los términos  $\delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}$  y  $\delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}$  corresponden al trabajo realizado sobre la interfaz por los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y  $\lambda_p$  respectivamente. Siendo  $\delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}$  la expresión mostrada en (2.40) y  $\delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}$ :

$$\delta \Pi_{\text{interf}}^{(p)}(\lambda_p, \delta p_D) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \lambda_p^{(I)} \delta g_p^{(I)}(p_D) dD \right\} \quad (3.24)$$

**Observación 3.5** Nótese que al igual que en (2.40) el trabajo realizado por el multiplicador de Lagrange  $\lambda_p$  vendrá dado por la suma de las integrales sobre el número total de interfaces  $N_I$ .

#### Ecuación de las restricciones para la transferencia de las presiones

Las ecuaciones (3.23) y (3.24), se encuentran restringidas para el campo de los desplazamientos mediante las ecuaciones variacionales (2.41) y (2.42) y, adicionalmente, para el campo de las presiones por:

$$\delta \Pi_{\lambda_p}(p_D, \delta \lambda_p) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \delta \lambda_p^{(I)} g_p^{(I)}(p_D) dD \right\} = 0 \quad (3.25)$$

**Observación 3.6** La expresión (3.25) impone que el gap de las presiones  $g_p$  sea nulo con el refinamiento de la malla, satisfaciendo la condición (3.20).

### 3.2.3.3 Linealización del sistema

#### Discretización

De la misma forma que los desplazamientos  $\mathbf{u}_S \in \Omega_S$ , la variable presión  $p_S \in \Omega_S$  y su variación  $\delta p_S \in \Omega_S$ , pueden ser escritas como una función de las funciones de interpolación  $\mathbb{N}_i$  para el elemento triangular lineal y de las presiones nodales ( $\hat{p}$ ) y su respectiva variación ( $\delta \hat{p}$ ).

$$p_S(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \hat{p}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \quad (3.26)$$

$$\delta p_S(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \delta \hat{p}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \quad (3.27)$$

Las presiones  $p_D \in D^q$ , corresponden a las presiones nodales de los vértices 1,2 y 3 que conforman cada parcela (Figura 3.3), por lo cual, también

pueden ser escritas como una interpolación lineal de las presiones de los nodos de los contornos y mediante las funciones de interpolación para el elemento finito triangular  $\mathbb{N}_i$  :

$$p_D(\mathbf{x}_n) \equiv p_q(\mathbf{x}_n) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \hat{p}_i^{(D)} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n^q \quad (3.28)$$

En cuanto al multiplicador de Lagrange de las presiones  $\lambda_p$ , la interpolación se llevará cabo a partir de las funciones de colocación  $\Psi(\mathbf{x}_n)$  vistas en la expresión (2.49).

$$\lambda_p(\mathbf{x}_n, p) = \Psi(\mathbf{x}_n) \Lambda_p \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n \quad (3.29)$$

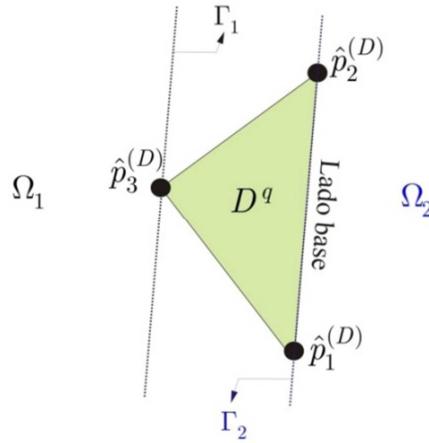


Figura 3.3: definición del campo de presiones  $p_D$  en cada una de las parcelas

$D^q$ .

Basándonos en las interpolaciones de las variables  $\mathbf{u}_S, \delta \mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D, \delta \mathbf{u}_D, \boldsymbol{\lambda}$  y  $\delta \boldsymbol{\lambda}$  mostradas en el capítulo II en las expresiones (2.43)-(2.48) y a partir de las igualdades (3.26)-(3.29), las integrales que conforman el principio de los trabajos virtuales y las ecuaciones variacionales con restricciones, pueden ser escritas de forma matricial tal y como se observa en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Forma matricial del principio de los trabajos virtuales y las ecuaciones variacionales con restricciones.

$\delta\Pi_{\text{mec}}^{\text{mix}} = \delta\Pi_{\text{int,ext}}^{\text{mix}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, p, \delta p) + \delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}) + \delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}(\delta p, \lambda_p) = 0$	(3.30)
$\delta\Pi_{\text{int,ext}}^{\text{mix}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, p, \delta p) \approx \delta\Pi_{\text{int,ext}}^{\text{mix}}(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}, \hat{p}, \delta\hat{p}) \rightarrow \mathbf{G}_{\text{int,ext}}^{\text{mix}}(\mathbf{d}_S, \hat{p}_S)$	(3.31)
$\delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\mathbf{u}) \approx \delta\Pi_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Lambda}, \delta\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{d}_D, \boldsymbol{\Lambda})$	(3.32)
$\delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}(\delta p, \lambda_p) \approx \delta\Pi_{\text{interf}}^{(p)}(\delta\hat{p}, \Lambda_p) \rightarrow \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(p)}(\Lambda_p)$ $\mathbf{G}_{\text{interf}}^{(p)}(\Lambda_p) = \int_{D_n} [\Psi \Lambda_p (\text{grad}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N})] dD$	(3.33)
$\delta\Pi_{\text{incomp}}(\mathbf{u}_S, \delta\mathbf{u}_S, p_S, \delta p_S) \approx \delta\Pi_{\text{incomp}}(\mathbf{d}_S, \delta\mathbf{d}_S, \hat{p}_S, \delta\hat{p}_S)$ $\delta\Pi_{\text{incomp}}(\mathbf{d}_S, \delta\mathbf{d}_S, \hat{p}_S, \delta\hat{p}_S) \rightarrow \mathbf{G}_{\text{incomp}}(\mathbf{d}_S, \hat{p}_S) = 0$	(3.34)
$\mathbf{G}_{\text{incomp}}(\mathbf{d}_S, \hat{p}_S) = \sum_{S=1}^{N_S} \left\{ \int_{\Omega_S} \mathbf{N} \frac{\ln J_S}{J_S} d\Omega + \hat{p}_S \left[ \int_{\Omega_S} \frac{1}{\kappa} \mathbf{N} \mathbf{N} d\Omega \right] \right\} = 0$	(3.35)
$\delta\Pi_{\lambda_N}(\mathbf{u}_D, \lambda_N, \delta\lambda_N) \approx \delta\Pi_{\lambda_N}(\mathbf{d}_D, \Lambda_N, \delta\Lambda_N)$ $\delta\Pi_{\lambda_N}(\mathbf{d}_D, \Lambda_N, \delta\Lambda_N) \rightarrow \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}_D, \Lambda_N) = 0$	(3.36)
$\delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{u}_D, \lambda_T, \delta\lambda_T) \approx \delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{d}_D, \Lambda_T, \delta\Lambda_T)$ $\delta\Pi_{\lambda_T}(\mathbf{d}_D, \Lambda_T, \delta\Lambda_T) \rightarrow \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}_D, \Lambda_T) = 0$	(3.37)
$\delta\Pi_{\lambda_p}(p_D, \delta\lambda_p) \approx \delta\Pi_{\Lambda_p}(\hat{p}_D, \delta\Lambda_p) \rightarrow \mathbf{G}_{R_{\Lambda_p}}(\hat{p}_D) = 0$ $\mathbf{G}_{R_{\Lambda_p}}(\hat{p}_D) = \int_{D_n} [(\text{grad}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}) \hat{p}_D] dD = 0$	(3.38)

Para mayor detalle sobre el desarrollo de las expresiones (3.31), (3.32), (3.36) y (3.37) se puede verificar el epígrafe 2.3.3.

Así, el nuevo problema discreto a resolver será:

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{d}, \hat{p} \\ \boldsymbol{\Lambda}, \Lambda_p \end{cases} \quad (3.39)$$

SATISFACIENDO:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{int,ext}}^{\text{mix}}(\mathbf{d}, \hat{p}) + \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(\text{u})}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Lambda}) + \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(p)}(\Lambda_p) &= 0 \\ \mathbf{G}_{\text{incomp}}(\mathbf{d}, \hat{p}) &= 0 \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_N}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Lambda}) &= 0 \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_T}}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\Lambda}) &= 0 \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_p}}(\hat{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Este sistema de ecuaciones no lineales será resuelto iterativamente usando el método de Newton-Raphson, a partir de la linealización de las expresiones (2.61) y (3.40):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \hat{p}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_N} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \hat{p}} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_p} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_N}}}{\partial \mathbf{d}} & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_N}}}{\partial \Lambda_N} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_T}}}{\partial \mathbf{d}} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_T}}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_p}}}{\partial \hat{p}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \hat{p} \\ \Delta \Lambda_N \\ \Delta \Lambda_T \\ \Delta \Lambda_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}} \\ \mathbf{G}_{\text{incomp}} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_N}} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_T}} \\ \mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_p}} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Tal y como se observa en la expresión (3.38) el vector residual de las restricciones  $\mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_p}}$  no depende del multiplicador de Lagrange de las presiones  $\Lambda_p$ . Es por esta razón, que al derivar en función de  $\Lambda_p$ , aparece

un cero en la diagonal de la matriz de rigidez (3.41) y por ende, nuevamente el problema exhibe bloqueo o inestabilidades en el caso que las discretizaciones utilizadas no satisfagan la condición de Babuska-Brezzi-Ladyzhenskaya (BBL).

### 3.2.3.4 Método de estabilización consistente

Basándonos en el método de la estabilización consistente propuesto en (Oliver, y otros, 2009), a la ecuación variacional con restricciones (3.38) se le agrega un término adicional, tal que, dependa del multiplicador de Lagrange de las presiones  $\lambda_p$ .

Este nuevo término, viene motivado por la identificación del multiplicador de Lagrange de las presiones  $\lambda_p$  visto en (3.19) ( $\lambda_p = 0$ ) y será adicionado de forma débil a la ecuación (3.38) de la siguiente manera:

$$\delta \Pi_{\lambda_p}(p, \lambda_p, \delta \lambda_p) = \sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{D_n} \delta \lambda_p^{(I)} g_p^{(I)}(p_D) dD \right\} + \underbrace{\sum_{I=1}^{N_I} \left\{ \int_{\Gamma_n} \delta \lambda_p^{(I)} \tau_p \lambda_p^{(I)} d\Gamma \right\}}_{\text{Término adicional}} = 0 \quad \forall \delta \lambda_p \in L^2(D) \quad (3.42)$$

Debido a que el multiplicador de Lagrange  $\lambda_p$  es forzado de forma débil a ser nulo sobre el lado base de la parcela triangular (ver ecuación (3.19)), se puede asegurar que el parámetro de estabilización  $\tau_p > 0$  puede ser tan pequeño como se desee (ver Observación 2.7), ya que el refinamiento de la malla anulará todo el segundo término, de forma automática.

Así, el nuevo vector de fuerzas residuales de las restricciones  $\mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\Lambda_p}}$  puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{R}_{\lambda_p}}(\hat{p}_D, \Lambda_p) = \int_{D_n} (grad(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}) \hat{p}_D dD + \int_{\Gamma_n} \tau_p (\Psi \Lambda_p) d\Gamma = 0 \quad (3.43)$$

^

Y el nuevo sistema matricial de ecuaciones no lineales:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \hat{p}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_N} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \hat{p}} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \Lambda_p} \\
 \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_N}}{\partial \mathbf{d}} & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_N}}{\partial \Lambda_N} & 0 & 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_T}}{\partial \mathbf{d}} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_T}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\
 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_p}}{\partial \hat{p}} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_p}}{\partial \Lambda_p}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta \mathbf{d} \\
 \Delta p \\
 \Delta \Lambda_N \\
 \Delta \Lambda_T \\
 \Delta \Lambda_p
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}} \\
 \mathbf{G}_{\text{incomp}} \\
 \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_N} \\
 \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_T} \\
 \mathbf{G}_{\mathbf{R}\Lambda_p}
 \end{bmatrix}
 \quad (3.44)$$

**Observación 3.7** Nótese que el valor de  $\tau_u$  introducido en las ecuaciones (2.64) y (2.65), no guarda ninguna relación con el  $\tau_p$  introducido en este capítulo. En la estabilización realizada en el epígrafe 2.3.4  $\tau_u$  es un parámetro que ajusta las dimensiones del término, mientras que en la ecuación (3.42) y (3.43) el  $\tau_p$  es un parámetro de carácter adimensional.

### 3.2.4 Resolución del sistema mediante el método de las subestructuras

Partiendo de las siguientes definiciones:

$$\mathbf{\Lambda}_m \equiv \begin{bmatrix} \Lambda_N & \Lambda_T & \Lambda_p \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\Delta \mathbf{d}_m \equiv \begin{bmatrix} \Delta d_x \\ \Delta d_y \\ \Delta \hat{p} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{\Lambda}_m \equiv \begin{bmatrix} \Delta \Lambda_N \\ \Delta \Lambda_T \\ \Delta \Lambda_p \end{bmatrix} \quad (3.46)$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{mec}^{mix} \\ \mathbf{G}_{incomp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_p \end{bmatrix} \equiv \mathbf{f}_{d_m}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}} \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}} \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Lambda_N} \\ \mathbf{f}_{\Lambda_T} \\ \mathbf{f}_{\Lambda_p} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{f}_{\Lambda_m} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{mec}^{mix}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{mec}^{mix}}{\partial \hat{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{incomp}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{incomp}}{\partial \hat{p}} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_{(dd)_m} \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{mec}^{mix}}{\partial \Lambda_N} & \frac{\partial \mathbf{G}_{mec}^{mix}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{mec}^{mix}}{\partial \Lambda_p} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_{d\Lambda_m} \quad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}}{\partial \mathbf{d}} & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}}{\partial \mathbf{d}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_p}}}{\partial \hat{p}} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_{\Lambda_m d} \quad (3.50)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_N}}}{\partial \Lambda_N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_T}}}{\partial \Lambda_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_p}}}{\partial \Lambda_p} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m} \quad (3.51)$$

El nuevo sistema a resolver mediante el método de las subestructuras corresponde al presentado en la expresión (3.52) a continuación, en donde las matrices  $\mathbf{K}_{(dd)_m}$ ,  $\mathbf{K}_{d\Lambda_m}$ ,  $\mathbf{K}_{\Lambda_m d}$ ,  $\mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m}$  y sus respectivos vectores de fuerzas, pueden ser calculados de forma simultánea e independiente para cada subdominio.

### Capítulo 3: Aplicación a formulaciones mixtas desplazamiento-presión

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(\text{dd})_m}^{(1)} \end{bmatrix} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(\text{dd})_m}^{(S)} \end{bmatrix} & & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(\text{dd})_m}^{(NS)} \end{bmatrix} & \\
\hline
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda_m \text{d}}^{(1)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda_m \text{d}}^{(S)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Lambda_m \text{d}}^{(NS)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda_m}^{(1)} \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda_m}^{(S)} \end{bmatrix} \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda_m}^{(NS)} \end{bmatrix} \\
\hline
\Delta \mathbf{d}_m^{(1)} \\
\vdots \\
\Delta \mathbf{d}_m^{(S)} \\
\vdots \\
\Delta \mathbf{d}_m^{(NS)} \\
\Delta \Lambda_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{f}_{\text{d}_m}^{(1)} \\
\vdots \\
\mathbf{f}_{\text{d}_m}^{(S)} \\
\vdots \\
\mathbf{f}_{\text{d}_m}^{(NS)} \\
\hline
\mathbf{f}_{\Lambda_m} \\
\mathbf{f}_{\Lambda_m}
\end{bmatrix} \quad (3.52)$$

### 3.2.4.1 Algoritmo de solución iterativa

BOX 3: Algoritmo iterativo para la resolución del sistema mixto con subdominios flotantes.

$$\text{Inicialización: } \begin{cases} \mathbf{d}_1^{(S)} = \mathbf{d}_0^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)} \\ \hat{p}_1^{(S)} = \hat{p}_0^{(S)} + \Delta \hat{p}_0^{(S)} \\ \Lambda_0 = 0; \quad \Lambda_{p_0} = 0 \end{cases}$$

Actualización de las coordenadas:  $\mathbf{x}_{1,S} = \mathbf{X}_{0,S} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)}$

1. Inicio del estado de carga ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ )
2. Cálculo de los vectores de fuerzas:
  - a. Cálculo del tensor de tensiones de forma desacoplada:
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} + p\mathbf{1}$$
  - b. Cálculo de los vectores de fuerzas:

$$\mathbf{f}_{\text{d}_m,0}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_m,0}$$

3. Inicio del Algoritmo iterativo del Newton Raphson ( $i = i + 1$ )
4. Cálculo de las matrices:  $\mathbf{K}_{(\text{dd})_m,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\text{d}\Lambda_m,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda_m \text{d},i}^{(S)}, \mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m,i}$
5. Reconocimiento de subdominios flotantes<sup>1</sup>:
  - a. Cálculo de la matrices  $\tilde{\mathbf{R}}$  y  $\tilde{\mathbf{K}}_{(\text{dd})_m}$  para los  $N_{SF}$  subdominios flotantes:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{(\text{dd})_m,i}^{(f)} = \mathbf{K}_{(\text{dd})_m,i}^{(f)} + c(\tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)})^T \tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)}$$

---

6. Cálculo de las variables:

## a. Multiplicadores de Lagrange:

$$\Delta \Lambda_{1,i}^m = (\mathbf{F}_{I,i}^m)^{-1} \mathbf{f}_{I,i}^m$$

$$\mathbf{F}_{I,i}^m = (\mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} \mathbf{K}_{\Lambda_m \mathbf{d}}^{(S)} \mathbf{K}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m}^{(S)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m}^{(S)} - \sum_{f=1}^{N_{SF}} \mathbf{K}_{\Lambda_m \mathbf{d}}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m}^{(f)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m}^{(f)})_i$$

$$\mathbf{f}_{I,i}^m = (\mathbf{f}_{\Lambda_m} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} \mathbf{K}_{\Lambda_m \mathbf{d}}^{(S)} \mathbf{K}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m}^{(S)-1} \mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} - \sum_{f=1}^{N_{SF}} \mathbf{K}_{\Lambda_m \mathbf{d}}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m}^{(f)-1} \mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(f)})_i$$

## b. Desplazamientos:

IF ( $S$ ) = No flotante

$$\Delta \mathbf{d}_{1,i}^{m,(S)} = (\mathbf{K}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m,i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} - \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m,i}^{(S)} \Delta \Lambda_{1,i}^m)$$

ELSE

$$\Delta \mathbf{d}_{1,i}^{m,(S)} = (\tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{d}\mathbf{d})_m,i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} - \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m,i}^{(S)} \Delta \Lambda_{1,i}^m)$$

END

$$7. \text{ Actualización de las variables: } \begin{cases} \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = \mathbf{d}_1^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} \\ \hat{p}_{1,i}^{(S)} = \hat{p}_1^{(S)} + \Delta \hat{p}_{1,i}^{(S)} \\ \Lambda_{1,i} = \Lambda_0 + \Delta \Lambda_{1,i} \\ \Lambda_{p_{1,i}} = \Lambda_{p_0} + \Delta \Lambda_{p_{1,i}} \end{cases}$$

8. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m,i}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_m,i}$ 9. Cálculo del vector de fuerzas residuales:  $\mathbf{f}_{\text{Res},i}$ 

## 10. Estimación del error:

Si  $\mathbf{f}_{\text{Res},i} < TOL.$ , ir al paso 1 haciendo  $(t_{i+1} = t_i + \Delta t)$ 

Si no, regresar al paso 3.

---

<sup>1</sup>  $N_{SP}$  corresponde al total de subdominios con desplazamientos preescritos suficientes, como para suprimir los movimientos de sólido rígido y  $N_{SF}$  al total de subdominios flotantes.

<sup>2</sup> Los superíndices ( $S$ ) y ( $f$ ) corresponden a los subdominios que pertenecen a  $N_{SP}$  y  $N_{SF}$  respectivamente.

<sup>3</sup> Todas las operaciones que poseen los superíndices ( $S$ ) o ( $f$ ) requieren un bucle o sobre los  $N_{SP}$  subdominios prescritos o los  $N_{SF}$  subdominios flotantes, según sea el caso.

---

### 3.3 Validación del método

#### 3.3.1 Análisis de convergencia, problema de la membrana de Cook

El problema de la membrana de Cook ha sido utilizado por muchos autores como una prueba de referencia para comprobar la formulación de los elementos mixtos tanto en condiciones de compresibilidad como de incompresibilidad (Simo, y otros, 1990), (Miehe, 1994). En este caso en particular, el test será utilizado para validar la transferencia de la variable presión a través de la interfaz.

El problema original, consiste en un panel inclinado fijado en un extremo y sometido a una carga de cizallamiento en el extremo libre.

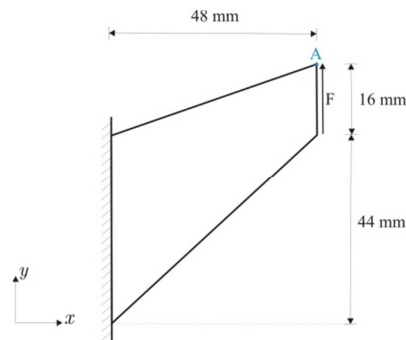


Figura 3.4: Ejemplo de la membrana de Cook.

Los datos considerados son:  $F = 1N$  la fuerza de cizallamiento aplicada,  $E = 70MPa$  el módulo de Young de la pieza y el módulo de Poisson:  $\nu = 1/3$  y  $\nu = 0.499995$  para los casos compresible e incompresible respectivamente.

Originalmente, con el fin de comprobar la convergencia de la formulación de los elementos, el test plantea discretizar la membrana en mallas de elementos finitos de  $2 \times 2$ ,  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  y  $50 \times 50$  elementos respectivamente. Sin embargo, en nuestro caso, primeramente se llevará a cabo la partición de la membrana de Cook en dos subdominios (Figura 3.5) y a partir de allí, se realizarán las correspondientes discretizaciones (Tabla 3.2).

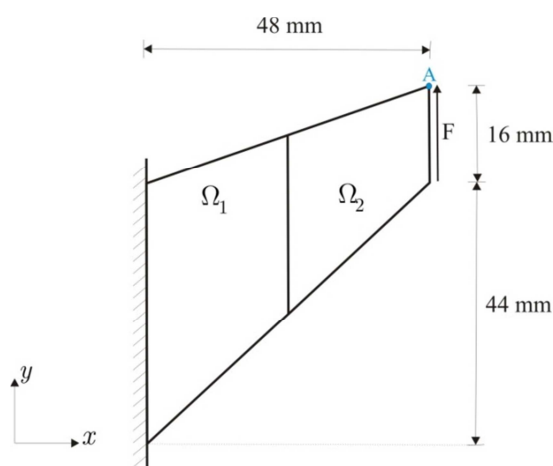


Figura 3.5: Membrana de Cook particionada en dos subdominios.

Tabla 3.2: Discretización de los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  en el estudio de la membrana de Cook.

Discretización	Mallas coincidentes		Mallas no coincidentes	
	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	$1 \times 2$	$1 \times 2$	$1 \times 2$	$1 \times 3$
2	$3 \times 6$	$3 \times 6$	$3 \times 6$	$3 \times 10$
3	$5 \times 10$	$5 \times 10$	$5 \times 10$	$5 \times 15$
4	$10 \times 20$	$10 \times 20$	$10 \times 20$	$10 \times 30$
5	$25 \times 50$	$25 \times 50$	$25 \times 50$	$25 \times 60$

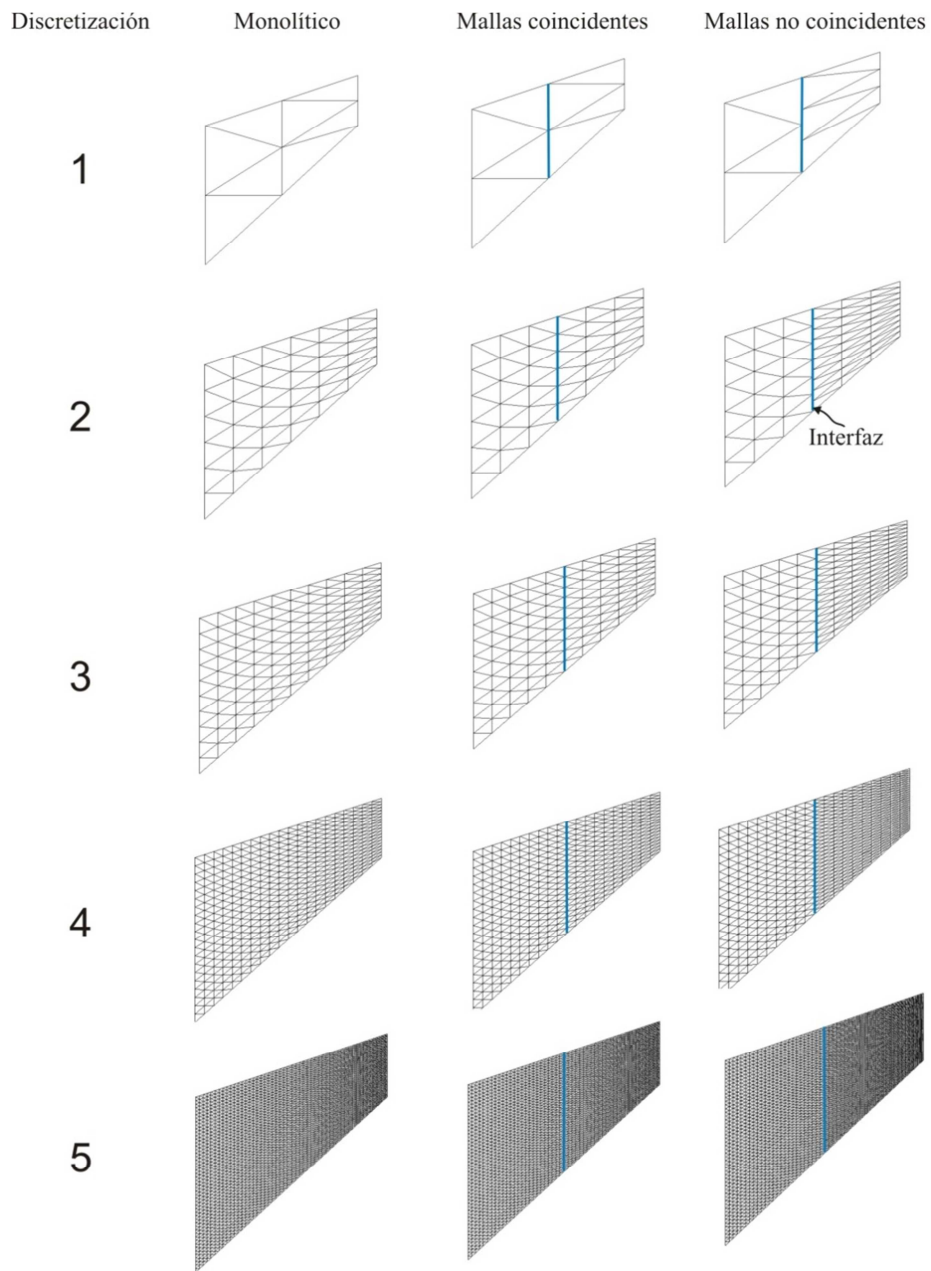


Figura 3.6: Discretizaciones presentadas en la Tabla 3.2.

El objetivo del ensayo es el de verificar la velocidad de convergencia de la formulación, a través de la medición del desplazamiento en la dirección  $y$ , del nodo superior A (ver Figura 3.4).

Basados en las discretizaciones vistas en la Figura 3.6. En las Figura 3.7 y Figura 3.8, se muestra una comparación entre los resultados del problema, resuelto monolíticamente (Rodríguez, 2014) y con el dominio  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con mallas coincidentes y no coincidentes (tanto para el caso compresible como el incompresible).

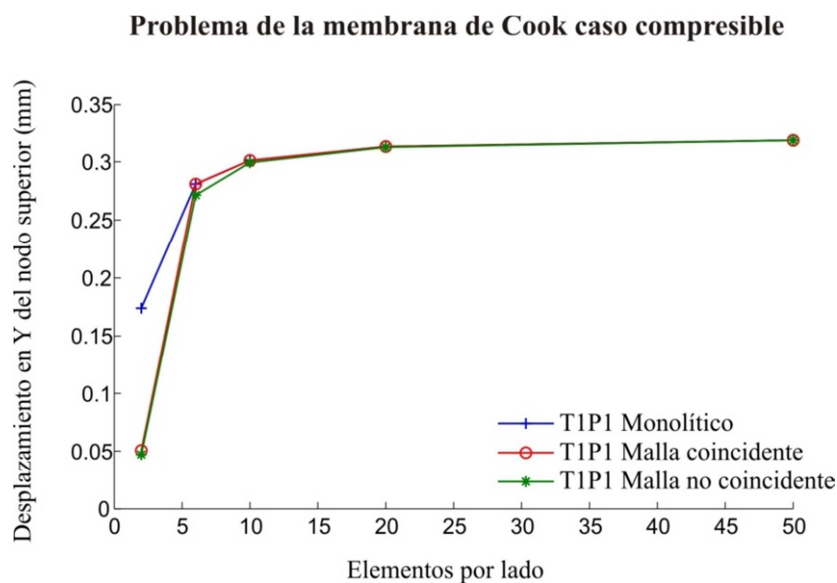


Figura 3.7: Problema de la membrana de Cook para ( $\nu = 0.3$ ).

Como puede observarse en las Figura 3.7 y Figura 3.8, la convergencia no se ve sustancialmente afectada al particionar la membrana de Cook en subdominios, tanto para el caso de mallas coincidentes como para el de mallas no coincidentes.

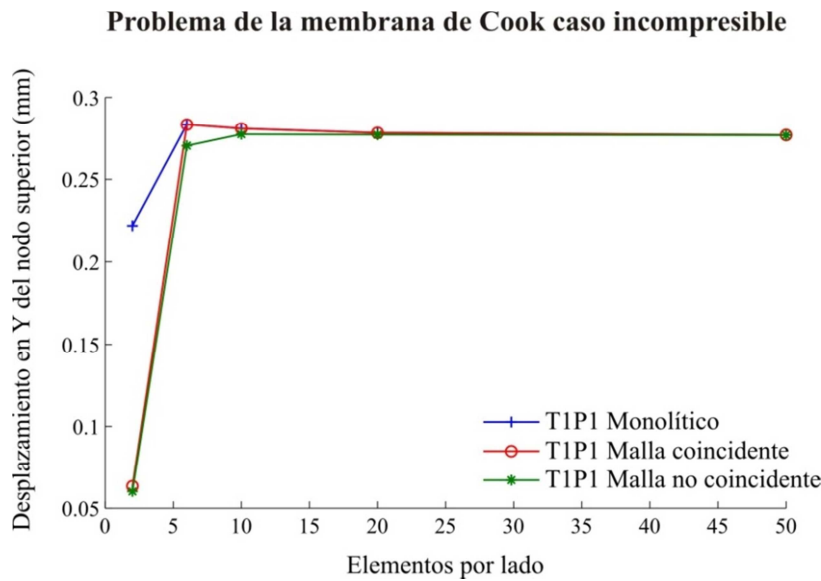


Figura 3.8: Problema de la membrana de Cook para ( $\nu = 0.499995$ ).

### 3.3.1.1 Efecto de la desactivación del multiplicador de Lagrange de las presiones

#### Efecto sobre la velocidad de convergencia en desplazamientos

Una de las cuestiones que surgen con respecto a la aparición del  $\lambda_p$  en la interfaz, corresponde a si los  $\lambda(\mathbf{u})$  deberían transmitir de forma automática la transferencia en presiones. Así, que con el ánimo de verificar la influencia del parámetro  $\lambda_p$ , se repitieron los ensayos anteriores activando y desactivando el multiplicador de Lagrange de las presiones sobre la interfaz.

En las Figura 3.9 y Figura 3.10 se observa que los resultados sobre la convergencia “*en desplazamientos*” se ven inalterados con la desactivación de este parámetro. En este sentido, se está poniendo en manifiesto que con tan sólo estar activos los multiplicadores de Lagrange de los desplazamientos  $\lambda_N$  y  $\lambda_T$  se garantiza una correcta transferencia de la variable  $(\mathbf{u})$  entre subdominios.



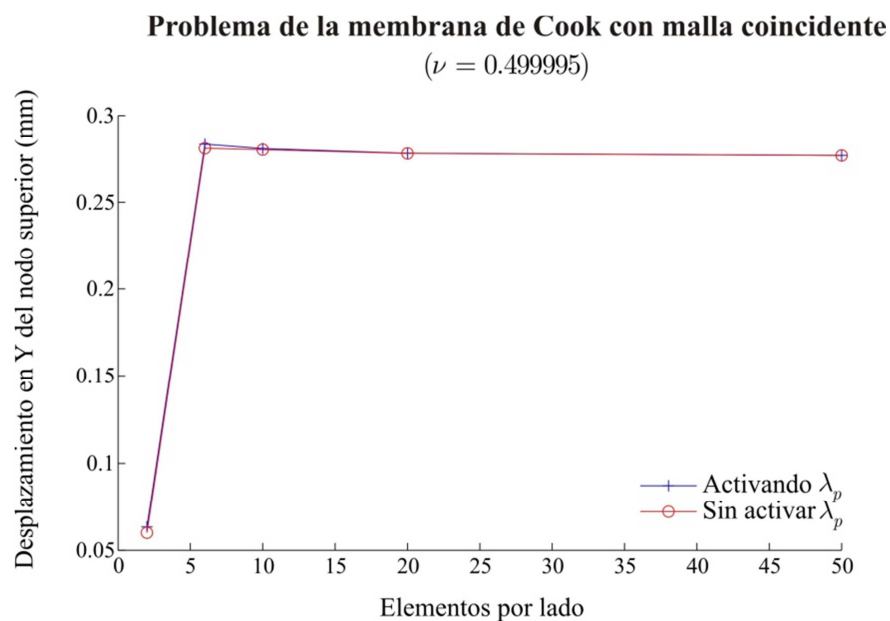


Figura 3.9: Velocidad de convergencia sobre una membrana particionada en subdominios con mallas coincidentes.

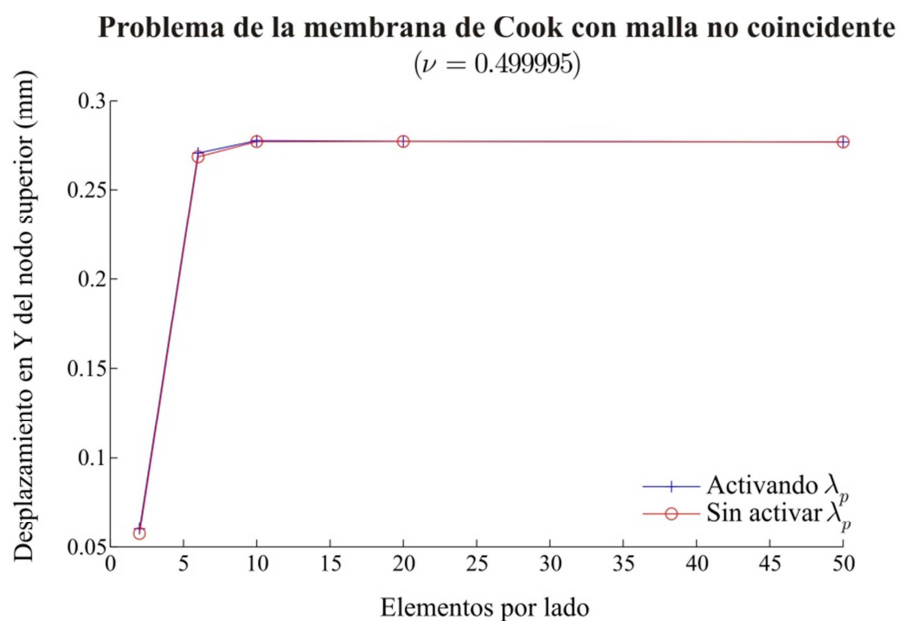


Figura 3.10: Velocidad de convergencia sobre una membrana particionada en subdominios con mallas no coincidentes.

Efecto sobre el salto en presiones

No obstante, la transferencia de las presiones entre subdominios a través de la interfaz, sí se ve afectada por la desactivación del multiplicador de Lagrange  $\lambda_p$ .

Partiendo nuevamente del problema de la membrana de Cook, se observó de qué forma afecta la activación del  $\lambda_p$  en la magnitud del salto de presiones entre los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Para esto, se llevó a cabo una medición de la norma  $L_2$  del error del salto:

$$\| [p] \|_{L_2} = \left( \int_0^l (p_i - p_j) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

Siendo  $[p]$  el salto de presiones entre subdominios,  $p_i$  y  $p_j$  las presiones de los nodos adyacentes a la interfaz y  $l$  la longitud total de la interfaz.

En las Figura 3.11 y Figura 3.12 tanto para el caso de subdominios con mallas coincidentes como no coincidentes, se observa como al activar el multiplicador de Lagrange de las presiones se produce un aumento de la velocidad de convergencia y una disminución considerable en la magnitud del error del salto, incluso para el caso de las mallas más gruesas.

Este efecto se puede corroborar a partir de la Figura 3.13 en donde se evidencia mediante los perfiles de presión, de forma cualitativa, que al desactivar el multiplicador de la Lagrange de las presiones ocurre un salto de la variable a través de la interfaz, y que si bien este salto disminuye a medida que la malla se hace más fina, no se logra alcanzar una transferencia de información tan precisa como la conseguida al activar  $\lambda_p$ .

**Error en el salto en presiones de una interfaz con mallas coincidentes**  
 $(\nu = 0.499995)$

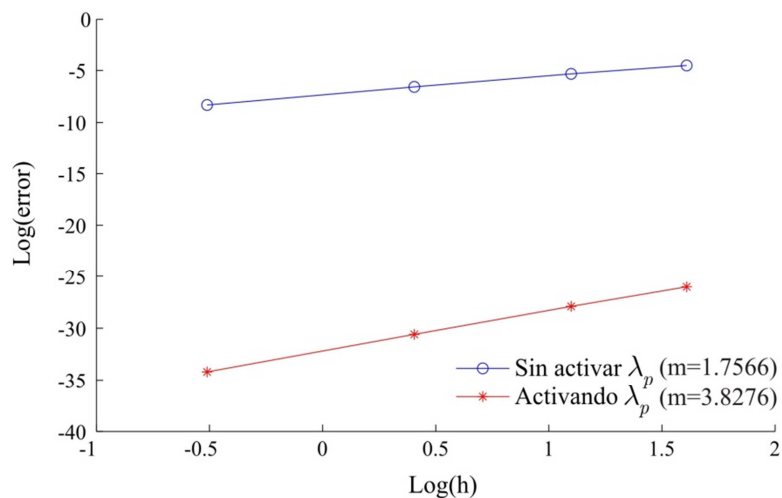


Figura 3.11: Problema de la membrana de Cook: Error en el salto de presiones, para un dominio  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con mallas coincidentes y  $\nu = 0.499995$ .

**Error en el salto en presiones de una interfaz con mallas no coincidentes**  
 $(\nu = 0.499995)$

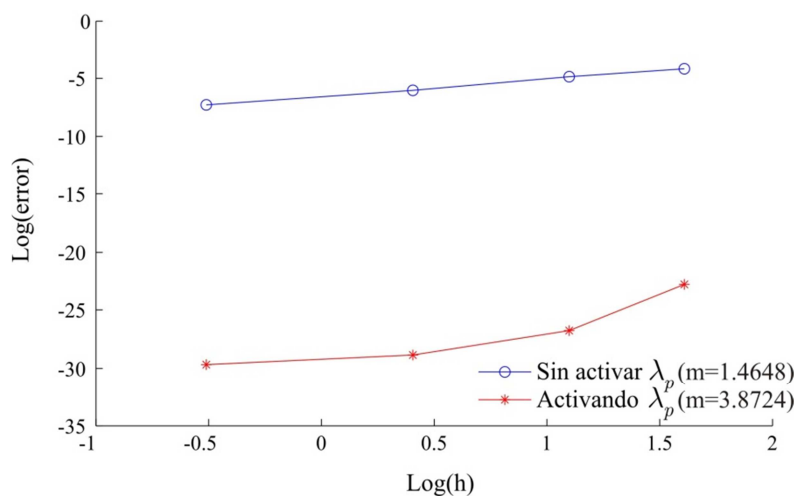


Figura 3.12: Problema de la membrana de Cook: Error en el salto de presiones, para un dominio  $\Omega$  particionado en los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  con mallas no coincidentes y  $\nu = 0.499995$ .

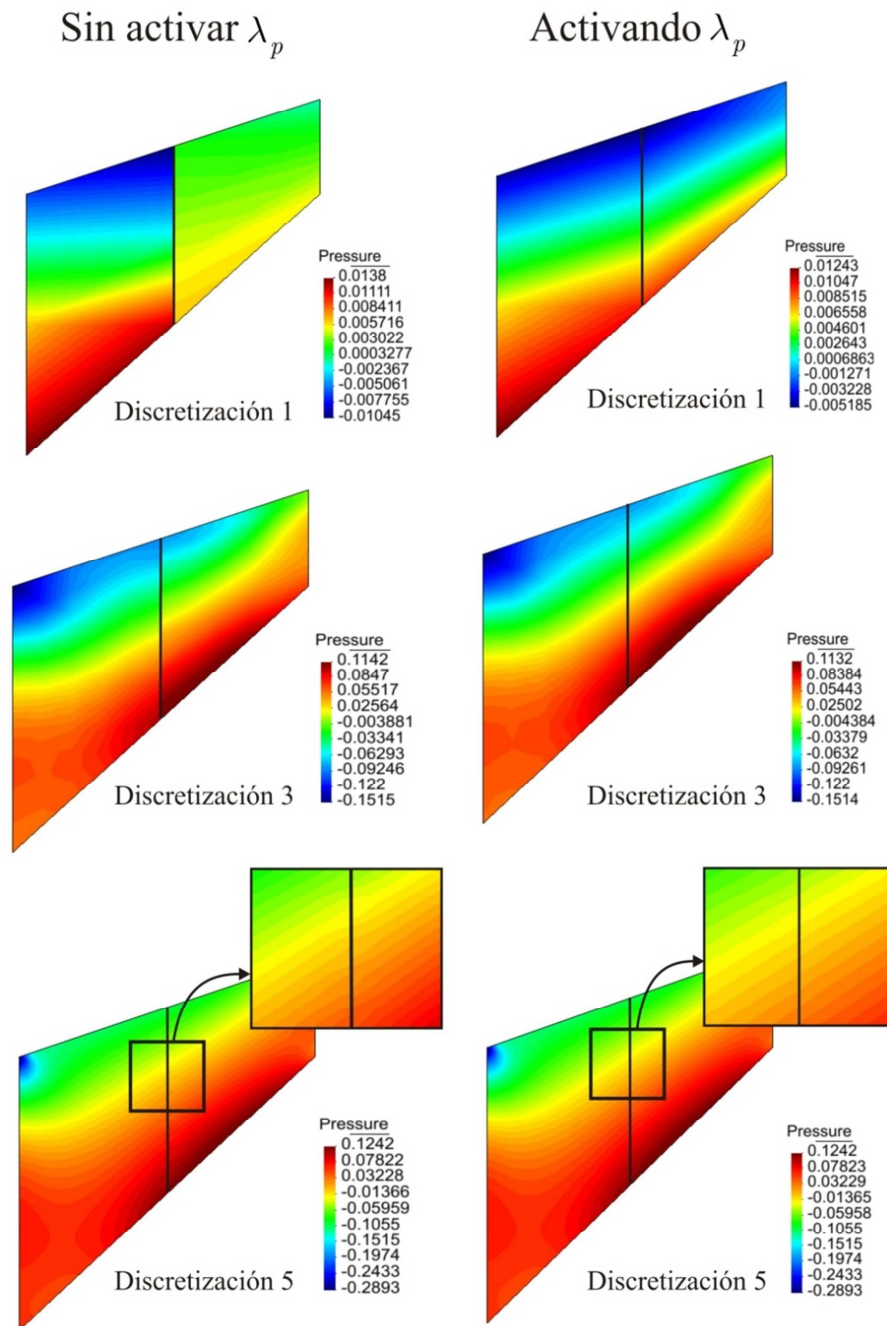


Figura 3.13: Perfil de presiones para tres de las discretizaciones de la membrana de Cook, particionada en subdominios con mallas no coincidentes y  $\nu = 0.499995$ .

Es por esta razón, que se concluye que para poder llevar a cabo simulaciones numéricas con formulaciones mixtas de desplazamiento – presión, asegurando una buena transferencia de la variable presión entre subdominios (sin importar la discretización que se escoja), es necesario activar sobre la interfaz, el multiplicador de Lagrange de las presiones  $\lambda_p$ .

### 3.3.1.2 Influencia del parámetro de estabilización $\tau_p$

Otro estudio llevado a cabo, corresponde a la evaluación del valor del parámetro de estabilización  $\tau_p$ , introducido en la ecuación (3.42).

Para que se observe este efecto, se partió de una membrana de Cook de discretización 3 (Tabla 3.2) con mallas no coincidentes y un valor de  $\nu = 0.499995$ . Sobre esta membrana, de llevaron a cabo dos simulaciones, la primera de ellas con un valor de  $\tau_p = 1 \times 10^{-4}$  y la segunda, con un valor de  $\tau_p$  elevado ( $\tau_p = 1 \times 10^{+4}$ ) midiéndose en ambos casos la variable presión sobre el plano de corte mostrado en la Figura 3.14 a continuación:

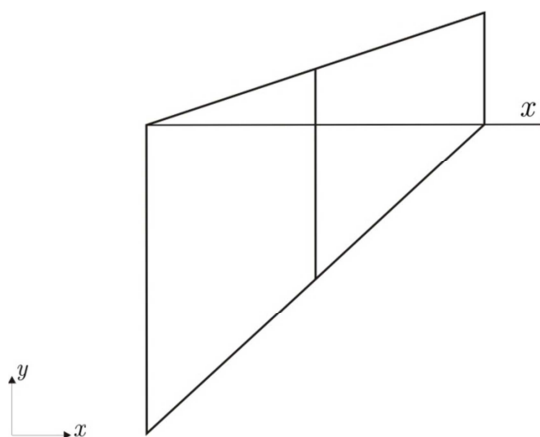


Figura 3.14: Plano de corte sobre el eje  $x$  de una membrana de Cook particionada en subdominios.

A continuación se presenta un gráfico en el que se observa el valor de la presión a lo largo del plano de corte dispuesto sobre el eje  $x$ , para los distintos valores de  $\tau_p$ :

#### Valores de presión a lo largo del eje $x$

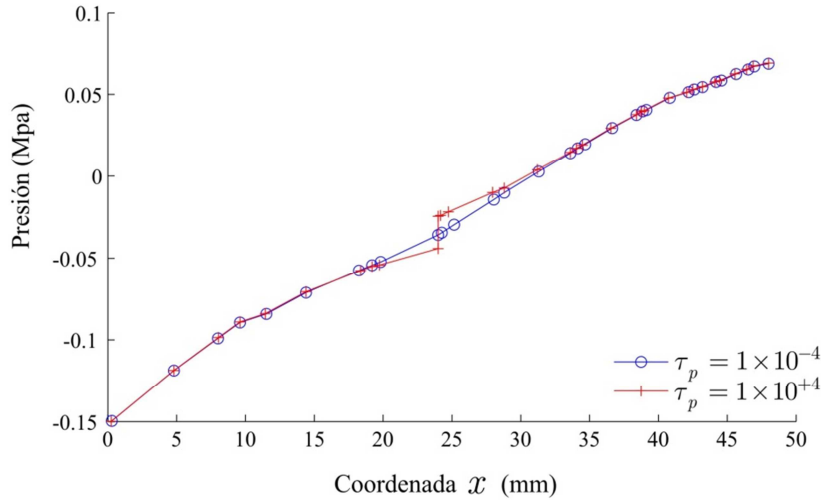


Figura 3.15: Valores de Presión (MPa) en una membrana de Cook de discretización 3 (Tabla 3.2) sobre el plano de corte del eje  $x$  y distintos parámetros de estabilización.

Tal y como se observa en la Figura 3.15, el valor de la presión a lo largo del plano de corte dispuesto sobre el eje  $x$ , muestra como un elevado valor del parámetro de estabilización de las presiones, ocasiona un salto de esta variable a nivel de la interfaz ( $x = 25\text{mm}$ ), mientras que un  $\tau_p$  pequeño, mantiene la continuidad.

Para cuantificar este efecto, a partir de la relación (3.53) se llevó a cabo la medida del error del salto para los distintos valores de  $\tau_p$ .

Como era de esperarse, a medida que la discretización de las mallas se hace más fina, el error del salto disminuye para ambos casos (ver Figura 3.16). Observándose que incluso, para grandes cambios del valor de  $\tau_p$  (8

órdenes de magnitud) se produce pequeños saltos en presiones, a través de la interfaz.

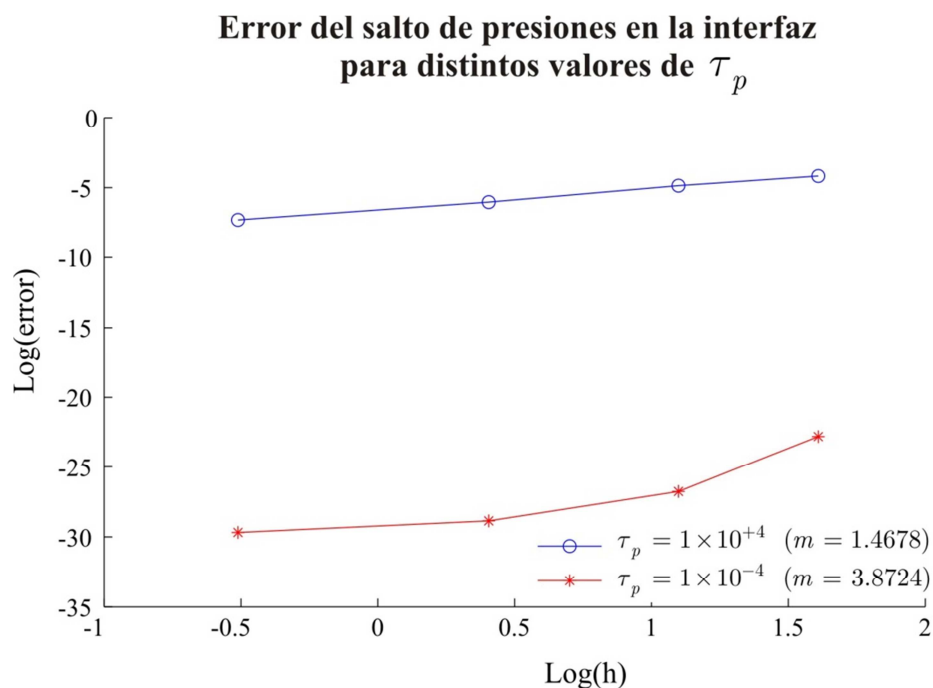


Figura 3.16: Error del salto en presiones, para membranas de Cook con mallas no coincidentes,  $\nu = 0.499995$  y distintos valores de  $\tau_p$ .

**Observación 3.8** Es importante señalar que la estrategia presentada en el apartado 2.5 del capítulo anterior, para los subdominios flotantes, no necesita ninguna modificación al introducirse la variable presión en la formulación de la interfaz.

La matriz  $\mathbf{K}_{(dd)mix}$  de la ecuación (3.48) puede ser invertida en la formulación mixta desplazamiento-presión, utilizando el mismo procedimiento que en la formulación irreducible.

### 3.4 Consideraciones finales

En el presente capítulo se inició con la descripción de las formulaciones mixtas desplazamiento-presión para la resolución de problemas incompresibles, estabilizada mediante una estrategia del tipo PPP.

La segunda parte de este capítulo estuvo dedicada a las modificaciones llevadas a cabo sobre la interfaz propuesta en este trabajo, para realizar simulaciones numéricas particionadas en subdominios con formulaciones mixtas desplazamiento-presión.

En la tercera y última parte del capítulo se muestra el problema de la membrana de Cook, a partir del cual se validó la interfaz para formulaciones mixtas y a partir de las cuales se pudieron obtener las siguientes conclusiones:

- La incorporación del  $\lambda_p$  no influye en la transferencia de la variable de los desplazamientos sobre la interfaz. Sin embargo, se comprobó que para una adecuada transferencia de la variable presión entre subdominios la activación de esta variable ( $\lambda_p$ ) es necesaria.
- Diferentes valores de  $\tau_p$  muestran diferencias en los resultados. Para grandes valores de  $\tau_p$  se induce un incremento en el valor del salto en presiones sobre la interfaz.

En el capítulo IV, se mostrarán las modificaciones llevadas a cabo sobre la técnica presentada en este apartado, con la finalidad de llevar a cabo simulaciones numéricas de problemas termomecánicos acoplados.



## 4 Aplicación al problema másico de conformado “*bulk-forming*”

### 4.1 Modelo termomecánico acoplado

#### 4.1.1 Descripción del problema

El modelo, será resuelto utilizando una estrategia de solución de tipo staggered, en la que se divide el problema en dos pasos: el primero de ellos con el campo térmico congelado (problema 1), y el segundo, manteniendo la configuración fija (problema 2), partiendo de las siguientes hipótesis:

- Existe una configuración local intermedia única, que caracteriza la respuesta elástica. Esto da lugar a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación (Figura 4.1).
- El flujo plástico es considerado isocórico.
- La respuesta en tensiones es isótropa.

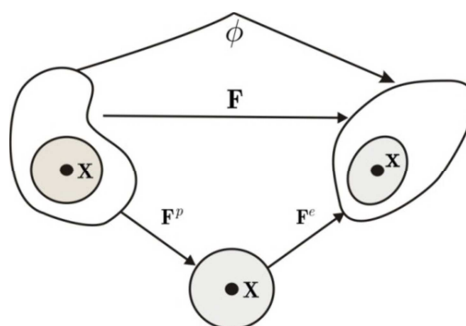


Figura 4.1: Cinemática de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación (Simo, y otros, 1992).

En la Figura 4.1 los superíndices  $e$  y  $p$  denotan la parte elástica y plástica del gradiente de la deformación, respectivamente; donde  $\mathbf{F}^p$  representa la deformación local del material debida a los movimientos de dislocación a través de su red cristalina.

#### 4.1.1.1 Forma fuerte del problema

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}_n) : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p(\mathbf{x}_n) : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta(\mathbf{x}_n) : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

SATISFACIENDO:

Ecuación de equilibrio:

$$DIV \mathbf{P} = -\mathbf{b} \quad \text{en } \Omega_n \quad (4.2)$$

Balance de energía:

$$\rho_0 \dot{E} + DIV \mathbf{Q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 R \quad (4.3)$$

Ecuación constitutiva de la presión:

$$\frac{p}{\kappa} = \frac{\ln(J)}{J} \quad \text{en } \Omega_n \quad (4.4)$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.5)$$

Condiciones de contorno de Neumann:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \hat{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (4.6)$$

Siendo  $\rho_0$  la densidad de referencia,  $\mathbf{b}$  el vector de fuerzas másicas residuales por unidad de volumen,  $DIV$  el operador de divergencia,  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$  el primer y segundo tensor de Piola Kirchhoff respectivamente.  $E(\mathbf{X}, t)$  corresponde a la energía interna por unidad de masa,  $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$  al flujo de calor,  $R(\mathbf{X}, t)$  la entrada de calor por unidad de masa y  $\mathbf{D}$  a la velocidad material de deformación del tensor derecho de Cauchy-Green (Marsden, y otros, 1994).

**Observación 4.1** Debido al carácter incompresible del material, debe llevarse a cabo el desacoplamiento del tensor de tensiones

mencionado en la **Observación 3.4** y adicionalmente, debe trabajarse con la ecuación constitutiva de la presión (Ecuación (4.4)) mencionada en la **Observación 3.2**.

#### 4.1.1.2 Desigualdades de disipación

La forma fuerte del problema descrita en el apartado anterior, se encuentra restringida por la segunda ley de la termodinámica, escrita como (Simo, y otros, 1992), (Rodriguez, 2014):

$$\begin{aligned} D_{\text{int}} &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \theta \dot{N} - \dot{E} \geq 0 \\ D_{\text{con}} &= -\frac{1}{\theta} \text{GRAD}(\theta) \cdot \mathbf{Q} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde  $D_{\text{int}}$  denota la disipación interna,  $D_{\text{con}}$  la restricción de disipación por conducción,  $\mathbf{F}$  es el tensor gradiente de la deformación,  $N$  la entropía,  $E$  la energía interna y  $\mathbf{Q}$  el flujo de calor nominal.

La primera de las ecuaciones mostradas en (4.7) asegura que la energía térmica no puede ser convertida en trabajo mecánico en un sistema a temperatura uniforme y sin fuentes de calor. La segunda ecuación, define la dirección del flujo de calor, impidiendo que el calor fluya espontáneamente del cuerpo más frío al más caliente.

**Observación 4.2** Nótese que en consistencia con la restricción de disipación por conducción (4.7)-b, el flujo de calor (nominal) es definido mediante la ley de Fourier:

$$\mathbf{Q} = -k \text{GRAD}(\theta) \quad (4.8)$$

donde  $k$  corresponde al coeficiente de conductividad térmica del material.

### 4.1.2 Modelo constitutivo

#### 4.1.2.1 Respuesta elástica

Partiendo de la hipótesis que la respuesta elástica corresponde a la de un material hiperelástico, la función de energía libre representa la base para el cálculo de las tensiones (Simo, y otros, 1992).

Conociendo que la energía libre es la parte de la energía interna  $E$  disponible para el trabajo a temperatura constante:

$$\Psi = E - \theta N \quad (4.9)$$

Se caracteriza la respuesta en tensiones, mediante la siguiente función de energía libre de Helmholtz:

$$\Psi = \underbrace{T(\theta) + M(\theta, J)}_{\text{Componente térmica}} + \underbrace{U(J) + W(\bar{\mathbf{b}}^e)}_{\text{Componente hiperelástica}} + \underbrace{K(\bar{e}^p, \theta)}_{\text{Ley de endurecimiento}} \quad (4.10)$$

siendo:

- $\bar{\mathbf{b}}^e$  la parte isocórica de la componente elástica del tensor izquierdo de Green-Lagrange  $\mathbf{b}^e$ .

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}(\mathbf{C}^p)^{-1}\mathbf{F}^T, \quad \bar{\mathbf{b}}^e = (J^e)^{-\frac{2}{3}}\mathbf{b}^e \quad (4.11)$$

- $\bar{e}^p$  la variable interna de endurecimiento.
- $T(\theta)$  el potencial de energía puramente térmico, descrito como:

$$T(\theta) = c \left[ (\theta - \theta_0) - \theta \log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) \right] \quad (4.12)$$

donde  $c$  corresponde al calor específico del material y  $\theta_0$  la temperatura de referencia.

- $M(J, \theta)$  es el potencial que describe el acople termomecánico debido a la expansión térmica.

$$M(J, \theta) = (\theta - \theta_0) \left[ -3\alpha \partial_J U(J) \right] \quad (4.13)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente lineal de dilatación térmica del material.

- $U(J)$  y  $W(\bar{\mathbf{b}}^e)$  corresponden, respectivamente, a las contribuciones volumétrica y desviadora de la energía libre elástica.

$$\begin{aligned} U(J) &= \kappa \left[ \frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln J \right] \\ W(\bar{\mathbf{b}}^e) &= \frac{1}{2}\mu \left[ \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3 \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $\kappa$  corresponde al módulo de compresibilidad y  $\mu$  al módulo de cizallamiento.

- $K(\bar{e}^p, \theta)$  corresponde a la función convexa que describe el potencial de endurecimiento por deformación isótropa.

$$K(\bar{e}^p, \theta) = \frac{1}{2} h(\theta) (\bar{e}^p)^2 - [\sigma_0(\theta) - \sigma_\infty(\theta)] H(\bar{e}^p) \quad (4.15)$$

$$H(\bar{e}^p) = \begin{cases} \bar{e}^p - \frac{1 - e^{\delta \bar{e}^p}}{\delta} & \text{for } \delta \neq 0 \\ 0 & \text{for } \delta = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(\theta) &= \sigma_0(\theta_0) [1 - \omega_0(\theta - \theta_0)] \\ \sigma_\infty(\theta) &= \sigma_\infty(\theta_0) [1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \\ h(\theta) &= h(\theta_0) [1 - \omega_h(\theta - \theta_0)] \end{aligned}$$

siendo  $\delta$  el exponente de saturación,  $\sigma_0(\theta_0)$  la tensión inicial de fluencia,  $\sigma_\infty(\theta_0)$  la tensión de endurecimiento final de saturación,  $h(\theta_0)$  el módulo lineal de endurecimiento obtenido a la temperatura de referencia  $\theta_0$ ,  $w_0$  y  $w_h$  los parámetros de tensión de fluencia por ablandamiento y endurecimiento-ablandamiento respectivamente.

**Observación 4.3** En cuanto a la función  $K(\bar{e}^p, \theta)$  que describe el potencial de endurecimiento por deformación isótropa, en este trabajo se utilizó el modelo de Voce (Voce, 1955) y Simo (Simo, y otros, 1992), sin embargo, es importante señalar que en la literatura se pueden encontrar modelos como el de (Johnson, y otros, 1983) y el de (Bäker, 2006), entre otros.

**Observación 4.4** Obsérvese, que a partir de las funciones de energía  $M(J, \theta)$ ,  $U(J)$  y  $W(\bar{b}^e)$  descritas en las relaciones (4.13) y (4.14) respectivamente, se puede obtener el tensor de tensiones desacoplado en sus componentes volumétrica y desviadora (Simo, y otros, 1992) como:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= pJ\mathbf{1} + dev[\boldsymbol{\tau}] \\
p &= U'(J) + \partial_J M(J, \theta) \\
dev\{\boldsymbol{\tau}\} &= 2dev\left[\bar{\mathbf{b}}^e \partial_{\bar{\mathbf{b}}^e} W(\bar{\mathbf{b}}^e)\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

#### 4.1.2.2 Función de fluencia

Partiendo del dominio termoelástico  $\Phi$  y de la superficie  $\partial\Phi$  que define el estado plástico del material, con  $\beta = -K'(\bar{e}^p, \theta)$ :

$$\Phi := \{(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) : \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) \leq 0\} \tag{4.18}$$

Se presenta la función de fluencia  $\phi$  utilizada en este trabajo, como el criterio de Von Mises con endurecimiento isotrópico (Simo, y otros, 1992) mostrado en la ecuación (4.19) a continuación:

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) = \|dev\boldsymbol{\tau}\| + \sqrt{\frac{2}{3}}[\beta - \sigma_y(\theta)] \leq 0 \tag{4.19}$$

Siendo  $\sigma_y(\theta)$  la tensión de fluencia, dependiente de la temperatura  $\theta$  y  $\lambda$  el parámetro de consistencia que satisface las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\lambda \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) \leq 0 \quad \lambda \cdot \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) = 0 \tag{4.20}$$

Las ecuaciones de evolución de las variables internas del modelo pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L_v \mathbf{b}^e &= -2\lambda \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) \cdot \mathbf{b}^e \\
\dot{\bar{e}}^p &= \lambda \partial_{\beta} \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta) \\
\dot{\eta}^p &= \lambda \partial_{\theta} \phi(\boldsymbol{\tau}, \beta, \theta)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Siendo  $L_v \mathbf{b}^e$  la derivada de Lie de la componente elástica del tensor izquierdo de Green-Lagrange (Simo, y otros, 1992).

#### 4.1.2.3 Respuesta térmica

Partiendo de la forma equivalente a la ecuación (4.3) de balance de energía:

$$\theta \dot{N} = -DIV \mathbf{Q} + R + D_{mec} \quad (4.22)$$

siendo  $N$  la entropía por unidad de volumen de referencia,  $\mathbf{Q}$  el flujo de calor nominal que se calcula mediante la ley de Fourier vista en la ecuación (4.8),  $R$  la fuente de calor prescrita y  $D_{mec}$  la disipación mecánica que surge como la descomposición de la disipación interna:

$$D_{int} := D_{mec} + D_{ther} \geq 0 \quad (4.23)$$

Usando la ecuación constitutiva de la entropía, calculando su derivada con respecto al tiempo y usando la regla de la cadena (Agelet de Saracibar, y otros, 1999), la ecuación de evolución de la temperatura puede ser escrita como:

$$c \dot{\theta} = -DIV \mathbf{Q} + R + D_{mec} - H \quad (4.24)$$

Donde  $c$  corresponde al calor específico a deformación constante y variables internas por unidad de volumen de referencia y  $H$  al calentamiento estructural elastoplástico (Simo, y otros, 1992).

#### 4.1.2.4 Algoritmo termomecánico acoplado

Se parte del principio de los trabajos virtuales para la formulación mixta desplazamiento-presión, mostrado en las ecuaciones (3.9) y (3.10), con su respectivo término de estabilización (3.11).

El problema termomecánico acoplado, resuelto mediante una estrategia de tipo staggered, consiste en adicionar al problema mixto, ya existente, la variable temperatura  $\theta$  y su variación  $\delta\theta$ , ambas pertenecientes al espacio de funciones de cuadrado integrable  $L^2(\Omega)$ , y, a su vez, la ecuación correspondiente a la componente térmica del balance de energía (Simo, y otros, 1992), derivada de la ecuación de evolución de la temperatura, mostrada en (4.24).

Una vez discretizado el dominio  $\Omega$  en un número finito de elementos, el principio de los trabajos virtuales en sus componentes mecánica y térmica será escrito de forma linealizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{mec}}^T [\hat{p}\mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]] \mathbf{F}^{-T} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbb{N}_{\text{mec}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbb{N}_{\text{mec}}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{G}_{\text{incomp}} = \int_{\Omega} \mathbb{N}_{\text{mec}} \frac{\ln J}{J} d\Omega + \hat{p} \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \mathbb{N}_{\text{mec}} \mathbb{N}_{\text{mec}} d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{ter}} &= \int_{\Omega} \left[ \mathbb{N}_{\text{ter}} \left[ c\dot{\hat{\theta}} \right] + \mathbf{B}_{\text{ter}}^T \left[ k\mathbf{GRAD}(\hat{\theta}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{N}_{\text{ter}} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y(\hat{\theta}) \Delta \lambda \right] \right] d\Omega \\ &\quad - \left[ \int_{\Omega} \mathbb{N}_{\text{ter}} \hat{R}_S d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbb{N}_{\text{ter}} D_S d\Gamma \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

---

BOX 4: Algoritmo termomecánico acoplado, resuelto mediante una estrategia de tipo staggered.

---

1. Definición de las condiciones iniciales:
  - a. Variables internas elementales en  $t_n$   $\left\{ \mathbf{G}_n^p, \bar{e}_n^p, \eta_n^p \right\}$ .
  - b. Condiciones iniciales a nivel nodal  $\left\{ \mathbf{d}_n, \hat{p}_n, \hat{\theta}_n \right\}$ .
2. Paso mecánico a temperatura inicial  $\theta_n$  constante.
  - o Sistema a resolver en  $t_{n+1}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}} \\ \mathbf{G}_{\text{incomp}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}}{\partial \hat{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \mathbf{d}} & \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{incomp}}}{\partial \hat{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \hat{p} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.28)$$

- o Actualización de variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}_{n+1} \\ \hat{p}_{n+1} &= \hat{p}_n + \Delta \hat{p}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.29)$$


---



---

3. Paso térmico a configuración constante  $\{\mathbf{d}_{n+1}, \hat{p}_{n+1}\}$ .

○ Sistema a resolver en  $t_{n+1}$ :

$$\mathbf{G}_{\text{ter}} + \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{ter}}}{\partial \theta} \Delta \theta = 0 \quad (4.30)$$

○ Actualización de la variable temperatura:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta \theta_{n+1} \quad (4.31)$$


---

**Observación 4.5** Nótese que el tensor de tensiones que conforma la expresión  $\mathbf{G}_{\text{mec}}^{\text{mix}}$  debe ser calculado de forma desacoplada, siendo la tensión desviadora aquella que se define mediante el algoritmo de retorno correspondiente a la función de fluencia (4.19) y a las condiciones de Kuhn-Tucker (4.20).

## 4.2 Problema termomecánico, particionado en subdominios

Considerando al dominio  $\Omega$  particionado en  $N_S$  subdominios  $\Omega_S$ , discretizados y conectados mediante sus respectivas interfaces. Los ingredientes adicionales en el método propuesto para la simulación de problemas termomecánicos son los siguientes:

### 4.2.1 Incorporación del multiplicador de Lagrange para la transferencia de la temperatura

La transferencia de información de la temperatura a través de la interfaz, se lleva a cabo mediante la incorporación de un multiplicador de Lagrange adicional denominado  $\lambda_\theta$ .

Éste, al igual que los multiplicadores de Lagrange de los desplazamientos y de la presión, se encuentra ubicado dentro de cada una de las parcelas  $D_n^q$  que conforman la interfaz.

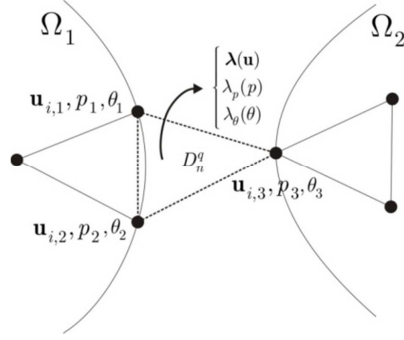


Figura 4.2: Incorporación del multiplicador de Lagrange  $\lambda_\theta$  para la transferencia de la temperatura a través de la interfaz.

Tal y como se observará más adelante (apartado 4.2.3.1), este multiplicador  $\lambda_\theta$  deberá de cumplir con la siguiente condición:

$$\lambda_\theta = \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{N}_q \quad (4.32)$$

siendo  $\mathbf{Q}_e$  el flujo de calor del elemento adyacente al lado base de la parcela triangular. La condición (4.32) establece que el multiplicador de Lagrange de la temperatura, debe ser igual al flujo de calor  $\mathbf{Q}_e$  proyectado sobre el vector normal  $\mathbf{N}_q$  definido dentro de la parcela triangular  $D_n^q$ .

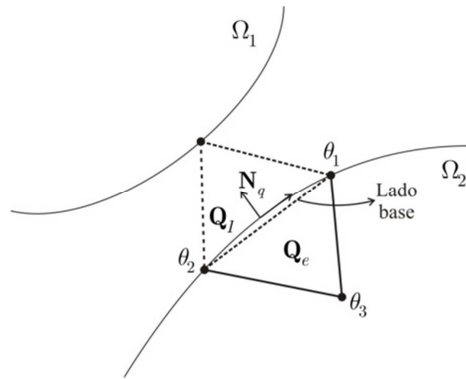


Figura 4.3: Descripción del flujo de calor del elemento adyacente  $\mathbf{Q}_e$  y de la parcela triangular en la interfaz de contacto  $\mathbf{Q}_I$ .

## 4.2.2 Definición del gap térmico

### 4.2.2.1 Gap térmico geométrico

Se define el gap térmico geométrico ( $g_\theta$ ) como el gradiente de la temperatura, proyectado sobre el vector normal al lado base de la parcela triangular  $D_n^q$  (ver Figura 4.4).

$$g_\theta = \frac{\partial \theta_q}{\partial \mathbf{N}_q} \quad (4.33)$$

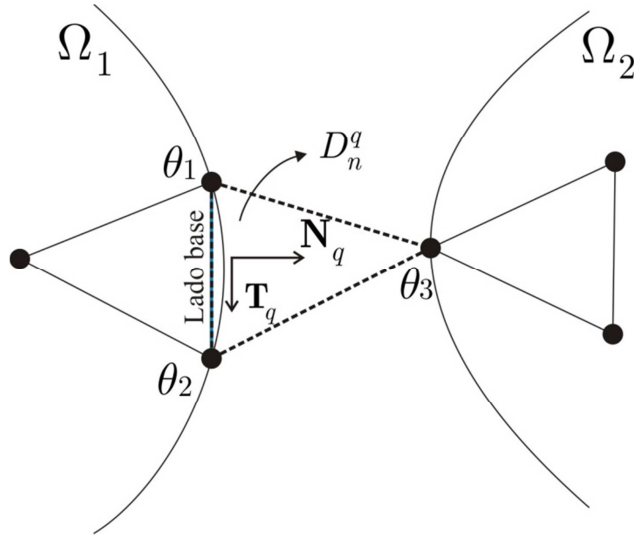


Figura 4.4: Valores de temperatura nodales de la parcela triangular y vector normal  $\mathbf{N}_q \in \Gamma_s$ , necesarios para el cálculo de  $g_\theta$ .

Este gap, tal y como se observará más adelante (apartado 4.2.3.1) será forzado de forma débil a anularse, lo cual, físicamente representa que el flujo de calor a través de la parcela triangular ( $\mathbf{Q}_I$ ) debe ser continuo.

### 4.2.3 Descripción del problema particionado en subdominios

#### 4.2.3.1 Forma fuerte del problema

Problema de valores de contorno

PROBLEMA:

$$\text{ENCONTRAR:} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta_S(\mathbf{x}_n^S) : \Omega_n^S \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda(\mathbf{x}_n) : D_n \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda_p(\mathbf{x}_n, p) : D_n \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda_\theta(\mathbf{x}_n, \theta) : D_n \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

SATISFACIENDO:

Ecuación de equilibrio:

$$DIV \mathbf{P}_S = -\mathbf{b}_S \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (4.35)$$

Balance de energía:

$$\rho_0 \dot{E}_S + DIV \mathbf{Q}_S = \mathbf{S}_S \cdot \mathbf{D}_S + \rho_0 R_S \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (4.36)$$

Ecuación constitutiva de la presión:

$$\frac{p_S}{\kappa} = \frac{\ln(J)}{J} \quad \text{en } \Omega_n^S \quad (4.37)$$

Condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u}_S = \hat{\mathbf{u}}_S \quad \text{en } \Gamma_{u,S} \quad (4.38)$$

Condiciones de contorno de Neumann:

$$\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N}_S = \hat{\mathbf{t}}_S \quad \text{en } \Gamma_{\sigma,S} \quad (4.39)$$

Identificación de los Multipladores de Lagrange:

$$\begin{cases} \lambda_N = t_{N,S} \\ \lambda_T = t_{T,S} \\ \lambda_p = 0 \\ \lambda_\theta = \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{N}_q \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_S \quad (4.40)$$

Condición de restricción:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{g}}(u) = 0 \\ g_p(p) = 0 \\ g_\theta(\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{en } D_n \quad (4.41)$$

#### 4.2.3.2 Forma débil del problema

Sabiendo que la resolución del modelo termomecánico acoplado corresponde a una estrategia de tipo staggered, en los siguientes apartados se presentarán sólo las ecuaciones correspondientes al problema térmico a configuración constante, teniendo en cuenta que la resolución del problema mecánico a temperatura constante se llevará a cabo mediante el procedimiento descrito en el capítulo III.

**Observación 4.6** Nótese que, en el paso mecánico, se deben tomar en cuenta las variaciones del modelo constitutivo explicadas en los epígrafes 4.1.2.1 y 4.1.2.2, respectivamente.

##### Principio de los trabajos virtuales

El problema térmico consiste en encontrar el campo de las temperaturas  $\theta_S \in L^2(\Omega_S)$  y los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_\theta \in L^2(D)$ , tal que satisfagan las siguientes expresiones  $\forall \delta\theta_S \in L^2(\Omega_S)$ :

$$\delta\Pi_{\text{ter}} = \delta\Pi_{\text{int,ext}}^{\text{ter}}(\theta, \delta\theta) + \delta\Pi_{\text{interf}}^{(\theta)}(\lambda_\theta, \delta\theta) = 0 \quad (4.42)$$

Siendo  $\delta\Pi_{\text{int,ext}}^{\text{ter}}$  la variación del trabajo térmico total y  $\delta\Pi_{\text{interf}}^{(\theta)}$  el trabajo realizado por el multiplicador de la Lagrange de la temperatura  $\lambda_\theta$  sobre la interfaz.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{int}}^{\text{ter}}(\theta, \delta \theta) = & \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_n^S} [\delta \theta_S [c \dot{\theta}_S]] d\Omega \\ & + \sum_{S=1}^{N_S} \int_{\Omega_n^S} \left[ k \nabla(\delta \theta_S) \cdot \nabla(\theta_S) - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda \sigma_y(\theta_S) \right] d\Omega \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\delta \Pi_{\text{ext}}^{\text{ter}}(\delta \theta) = \sum_{S=1}^{N_S} \left\{ \int_{\Omega_n^S} \delta \theta \hat{R}_S d\Omega + \int_{\Gamma_{q,S}} \delta \theta [-D_S] d\Gamma \right\} \quad (4.44)$$

Donde  $\hat{R}_S$  corresponde a las fuentes de calor y  $D_S$  al flujo de calor exterior aplicado sobre la superficie  $\Gamma_q$ , ambos, pertenecientes a los subdominios  $S$  que correspondan.

En cuanto al trabajo realizado por el multiplicador de Lagrange sobre la interfaz, vendrá dado por la suma de las integrales sobre los  $N_I$  dominios de interfaz:

$$\delta \Pi_{\text{interf}}^{(\theta)}(\lambda_\theta, \delta \theta) = \sum_{I=1}^{N_I} \int_{D_n} \lambda_\theta^{(I)} \delta g_\theta^{(I)}(\theta_D) dD \quad (4.45)$$

Ecuación adicional de las restricciones para la transferencia de la temperatura y penalización consistente

Por su parte, las ecuaciones (4.43)-(4.45) se encuentran restringidas mediante una ecuación variacional adicional, que se deriva de la condición (4.41) y que fuerza de forma débil a que el gap térmico a través de la parcela sea nulo ( $g_\theta = 0$ ).

$$\delta \Pi_{\lambda_\theta}(\theta, \delta \lambda_\theta) = \sum_{I=1}^{N_I} \int_{D_n} \delta \lambda_\theta^{(I)} g_\theta^{(I)}(\theta_D) dD = 0 \quad (4.46)$$

Tal y como se ha observado en los capítulos anteriores, el hecho de que la ecuación (4.46) no dependa del multiplicador de Lagrange de la temperatura, convierte al sistema matricial final, en un sistema propenso a exhibir inestabilidades o bloqueo en el caso de que las discretizaciones utilizadas no cumplan con la condición BBL.

Es por esta razón, que a la expresión (4.46) se le adiciona un término de penalización consistente que asegura, que dicha expresión dependa del multiplicador de Lagrange  $\lambda_\theta$  de la siguiente manera:

$$\delta\Pi_{\lambda_\theta}(\theta, \lambda_\theta, \delta\lambda_\theta) = \sum_{I=1}^{N_I} \int_{\Gamma_n} \delta\lambda_\theta^{(I)} \tau_\theta (\mathbf{Q}(\theta_S) \cdot \mathbf{N} - \lambda_\theta^{(I)}) d\Gamma \quad (4.47)$$

Este término, se encuentra motivado por la condición (4.40)-(d) y fuerza de forma débil a que el multiplicador de Lagrange de la temperatura sea igual al flujo de calor del elemento adyacente  $\mathbf{Q}_e$  proyectado sobre el vector normal  $\mathbf{N}_q$  (Figura 4.3).

En cuanto al parámetro de estabilización  $\tau_\theta > 0$  para el ajuste de las dimensiones del término, puede ser escrito como:

$$\tau_\theta = \frac{\alpha L}{k} \quad (4.48)$$

Donde  $\alpha > 0$  corresponde a un valor adimensional,  $L$  a la longitud del lado base de la parcela triangular y  $k$  al coeficiente de conductividad térmica del material.

### 4.2.3.3 Linealización del sistema

#### Discretización

Considerando la discretización espacial de cada subdominio como un conjunto de elementos que no se solapan. La variable temperatura y su variación pueden ser escritas como una función de las funciones de interpolación  $\mathbb{N}_i$  de un elemento triangular lineal y de sus respectivas temperaturas y variaciones nodales  $(\hat{\theta})$  y  $(\delta\hat{\theta})$ :

$$\begin{aligned} \theta_S(\mathbf{x}_n) &= \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \hat{\theta}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \\ \delta\theta_S(\mathbf{x}_n) &= \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \delta\hat{\theta}_{i,S} \quad \forall \mathbf{x}_n \in \Omega_S \end{aligned} \quad (4.49)$$

En cuanto a las temperaturas  $\theta_D \in D^q$ , corresponden a las temperaturas nodales de los vértices 1,2 y 3 que conforman cada parcela (Figura 4.5), y por ende, también pueden ser escritas como una interpolación lineal de la temperatura de los nodos que conforman la parcela triangular y las funciones de interpolación para el elemento triangular lineal:

$$\theta_D(\mathbf{x}_n) \equiv \theta_q(\mathbf{x}_n) = \sum \mathbb{N}_i(\mathbf{x}_n) \hat{\theta}_i^{(D)} \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n^q \quad (4.50)$$

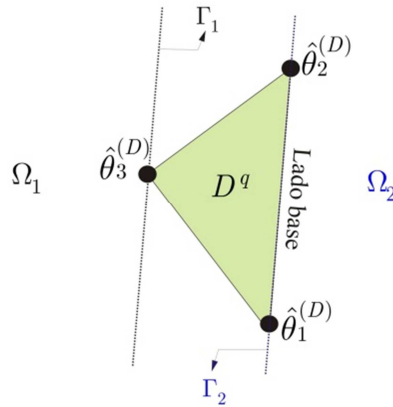


Figura 4.5: Definición del campo de las temperaturas  $\theta_D$  sobre  $D^q$ .

Por su parte, el multiplicador de Lagrange de la temperatura, puede ser escrito como una función de las funciones de colocación  $\Psi(\mathbf{x}_n)$  definidas dentro de cada una de las parcelas triangulares  $D_n^q$  (ver expresión (2.49) en el apartado 2.3.3.1) y su respectivo valor elemental.

$$\lambda_\theta = \Psi(\mathbf{x}_n) \Lambda_\theta \quad \forall \mathbf{x}_n \in D_n^q \quad (4.51)$$

A partir de estas interpolaciones, el problema térmico mostrado en las expresiones (4.34)-(4.41) puede ser reescrito de forma discreta de la siguiente forma:

$$\text{ENCONTRAR: } \begin{cases} \hat{\theta} \\ \Lambda_\theta \end{cases} \quad (4.52)$$



SATISFACIENDO:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\text{ter}}(\hat{\theta}, \Lambda_{\theta}) = \mathbf{G}_{\text{int,ext}}^{\text{ter}}(\hat{\theta}) + \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(\theta)}(\Lambda_{\theta}) = 0 \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}(\hat{\theta}, \Lambda_{\theta}) = 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

donde:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\text{int},S}^{\text{ter}}(\hat{\theta}) = \int_{\Omega_n^S} \left[ \mathbb{N} \left[ c \dot{\hat{\theta}}_S \right] + \mathbf{B}^T \left[ k \nabla \hat{\theta}_S \right] - \mathbb{N} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y(\hat{\theta}_S) \Delta \lambda \right] \right] d\Omega \\ G_{\text{ext},S}^{\text{ter}} = \int_{\Omega_n^S} \mathbb{N} \hat{R}_S d\Omega - \int_{\Gamma_{q,S}} \mathbb{N} D_S d\Gamma \\ \mathbf{G}_{\text{interf}}^{(\theta)}(\Lambda_{\theta}) = \int_{D_n} \left[ \Psi \Lambda_{\theta} \left( \nabla(\mathbb{N}) \cdot \mathbf{N}_S \right) \right] dD \end{cases} \quad (4.54)$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}(\hat{\theta}, \Lambda_{\theta}) = \int_{D_n} \left[ \nabla \mathbb{N} \cdot \mathbf{N}_S \right] \hat{\theta}_D dD \\ - \int_{\Gamma_n} \tau_{\theta} \left[ k \mathbf{N}_S^t \left( \nabla \mathbb{N} \right) \hat{\theta}_S + \Psi \Lambda_{\theta} \right] d\Gamma \end{cases} \quad (4.55)$$

Matricialmente este sistema puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{ter}}}{\partial \hat{\theta}} \right] \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}}{\partial \hat{\theta}} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{ter}}}{\partial \Lambda_{\theta}} \right] \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}}{\partial \Lambda_{\theta}} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\theta} \\ \Delta \Lambda_{\theta} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\text{ter}} \\ \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

#### Desacoplamiento del sistema:

Para llevar a cabo desacoplamiento del sistema, previamente se realizarán las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\theta\theta} &\equiv \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{ter}}}{\partial \hat{\theta}}; & \mathbf{K}_{\theta\Lambda_{\theta}} &\equiv \frac{\partial \mathbf{G}_{\text{ter}}}{\partial \Lambda_{\theta}}; \\ \mathbf{K}_{\Lambda_{\theta}\theta} &\equiv \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}}{\partial \hat{\theta}}; & \mathbf{K}_{\Lambda_{\theta}\Lambda_{\theta}} &\equiv \frac{\partial \mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}}}{\partial \Lambda_{\theta}}; \\ \mathbf{f}_{\theta} &\equiv -\mathbf{G}_{\text{ter}}; & \mathbf{f}_{\Lambda_{\theta}} &\equiv -\mathbf{G}_{R_{\Lambda_{\theta}}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

A partir de las cuales, el sistema (2.63) puede ser resuelto mediante el método de las subestructuras:

$$\begin{bmatrix}
 \left[ \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(1)} \right] & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & \left[ \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(S)} \right] & & & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & \left[ \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(N_s)} \right] & \\
 \hline
 \left[ \mathbf{K}_{\Lambda_\theta\theta}^{(1)} \right] & \cdots & \left[ \mathbf{K}_{\Lambda_\theta\theta}^{(S)} \right] & \cdots & \left[ \mathbf{K}_{\Lambda_\theta\theta}^{(N_s)} \right] & \left[ \mathbf{K}_{\Lambda_\theta\Lambda_\theta} \right]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \left[ \mathbf{K}_{\theta\Lambda_\theta}^{(1)} \right] \\
 \vdots \\
 \left[ \mathbf{K}_{\theta\Lambda_\theta}^{(S)} \right] \\
 \vdots \\
 \left[ \mathbf{K}_{\theta\Lambda_\theta}^{(N_s)} \right] \\
 \left[ \mathbf{K}_{\Lambda_\theta\Lambda_\theta} \right]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta\hat{\theta}^{(1)} \\
 \vdots \\
 \Delta\hat{\theta}^{(S)} \\
 \vdots \\
 \Delta\hat{\theta}^{(N_s)} \\
 \Delta\Lambda_\theta
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{f}_\theta^{(1)} \\
 \vdots \\
 \mathbf{f}_\theta^{(S)} \\
 \vdots \\
 \mathbf{f}_\theta^{(N_s)} \\
 \mathbf{f}_{\Lambda_\theta}
 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

#### 4.2.3.4 Algoritmo de resolución iterativa por el método de las subestructuras

---

BOX 5: Algoritmo iterativo para la resolución de un sistema termomecánico acoplado con estrategia de tipo staggered.

---

1. Inicio del estado de carga ( $t_1 = t_0 + \Delta t$ )

**Paso Mecánico:**

2. Inicialización paso mecánico:
 
$$\begin{cases}
 \mathbf{d}_1^{(S)} = \mathbf{d}_0^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)} \\
 \hat{p}_1^{(S)} = \hat{p}_0^{(S)} + \Delta \hat{p}_0^{(S)} \\
 \hat{\theta}_1^{(S)} = \hat{\theta}_0^{(S)} \\
 \Lambda_0 = 0; \quad \Lambda_{p_0} = 0;
 \end{cases}$$
3. Actualización de las coordenadas:  $\mathbf{x}_{1,S} = \mathbf{X}_{0,S} + \Delta \mathbf{d}_0^{(S)}$
4. Cálculo de los vectores de fuerzas:

- a. Cálculo del tensor de tensiones de forma desacoplada:

$$\begin{aligned}
 \tau &= pJ\mathbf{1} + dev[\boldsymbol{\tau}] \\
 p &= U'(J) + \partial_J M(J, \theta) \\
 dev[\boldsymbol{\tau}] &= 2dev[\bar{\mathbf{b}}^e \partial_{\bar{\mathbf{b}}^e} W(\bar{\mathbf{b}}^e)]
 \end{aligned}$$


---

---

b. Cálculo de los vectores de fuerzas:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m,0}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_m,0}$$

5. Inicio del Algoritmo iterativo del Newton Raphson ( $i = i + 1$ )

6. Cálculo de las matrices:  $\mathbf{K}_{(\mathbf{dd})_m,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m,i}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda_m\mathbf{d},i}^{(S)}, \mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m,i}$

7. Reconocimiento de subdominios flotantes<sup>1</sup>:

a. Cálculo de la matrices  $\tilde{\mathbf{R}}$  y  $\tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{dd})_m}$  para los  $N_{SF}$  subdominios flotantes:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{dd})_m,i}^{(f)} = \mathbf{K}_{(\mathbf{dd})_m,i}^{(f)} + c(\tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)})^T \tilde{\mathbf{R}}_i^{(f)}$$

8. Cálculo de las variables:

a. Multiplicadores de Lagrange:

$$\Delta\Lambda_{1,i}^m = (\mathbf{F}_{S,i}^m)^{-1} \mathbf{f}_{S,i}^m$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{S,i}^m = & (\mathbf{K}_{(\Lambda\Lambda)_m} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} \mathbf{K}_{\Lambda_m\mathbf{d}}^{(S)} \mathbf{K}_{(\mathbf{dd})_m}^{(S)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m}^{(S)} \\ & - \sum_{f=1}^{N_{SF}} \mathbf{K}_{\Lambda_m\mathbf{d}}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{dd})_m}^{(f)-1} \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m}^{(f)})_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{S,i}^m = & (\mathbf{f}_{\Lambda_m} - \sum_{S=1}^{N_{SP}} \mathbf{K}_{\Lambda_m\mathbf{d}}^{(S)} \mathbf{K}_{(\mathbf{dd})_m}^{(S)-1} \mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} \\ & - \sum_{f=1}^{N_{SF}} \mathbf{K}_{\Lambda_m\mathbf{d}}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{dd})_m}^{(f)-1} \mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(f)})_i \end{aligned}$$

b. Desplazamientos:

IF ( $S$ ) = No flotante

$$\Delta\mathbf{d}_{1,i}^{m,(S)} = (\mathbf{K}_{(\mathbf{dd})_m,i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} - \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m,i}^{(S)} \Delta\Lambda_{1,i}^m)$$

ELSE

$$\Delta\mathbf{d}_{1,i}^{m,(S)} = (\tilde{\mathbf{K}}_{(\mathbf{dd})_m,i}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\mathbf{d}_m}^{(S)} - \mathbf{K}_{\mathbf{d}\Lambda_m,i}^{(S)} \Delta\Lambda_{1,i}^m)$$

END

---

---


$$9. \text{ Actualización de las variables: } \begin{cases} \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} = \mathbf{d}_1^{(S)} + \Delta \mathbf{d}_{1,i}^{(S)} \\ \hat{p}_{1,i}^{(S)} = \hat{p}_1^{(S)} + \Delta \hat{p}_{1,i}^{(S)} \\ \hat{\theta}_{1,i}^{(S)} = \hat{\theta}_1^{(S)} \\ \Lambda_{1,i} = \Lambda_0 + \Delta \Lambda_{1,i} \\ \Lambda_{p_{1,i}} = \Lambda_{p_0} + \Delta \Lambda_{p_{1,i}} \end{cases}$$

10. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{\mathbf{d}_{m,i}}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_{m,i}}^{(S)}$

11. Cálculo del vector de fuerzas residuales:  $\mathbf{f}_{\text{Res},i}$

12. Estimación del error:

Si  $\mathbf{f}_{\text{Res},i} < \text{TOL.}$ , *CONTINUAR*  $\rightarrow$  *PASO TÉRMICO*

Si no, regresar al paso 5 y hacer ( $i = i + 1$ )

### **Paso Térmico:**

13. Inicialización variables para paso térmico:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_1^{(S)} = \mathbf{d}_{1,i}^{(S)}; \hat{p}_1^{(S)} = \hat{p}_{1,i}^{(S)} \\ \hat{\theta}_1^{(S)} = \hat{\theta}_{1,i}^{(S)} \\ \Lambda_{\theta,0} = 0; \end{cases}$$

14. Cálculo de los vectores de fuerzas:

a. Cálculo del tensor de tensiones de forma desacoplada:

$$\begin{aligned} \tau &= pJ\mathbf{1} + dev[\boldsymbol{\tau}] \\ p &= U'(J) + \partial_J M(J, \theta) \\ dev[\boldsymbol{\tau}] &= 2dev[\bar{\mathbf{b}}^e \partial_{\bar{\mathbf{b}}^e} W(\bar{\mathbf{b}}^e)] \end{aligned}$$

b. Cálculo de los vectores de fuerzas:

$$\mathbf{f}_{\theta,0}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_{\theta,0}}^{(S)}$$

15. Inicio del Algoritmo iterativo: ( $j = j + 1$ )

16. Cálculo de las matrices:  $\mathbf{K}_{\theta\theta,j}^{(S)}, \mathbf{K}_{\theta\Lambda_{\theta,j}}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda_{\theta}\theta,j}^{(S)}, \mathbf{K}_{\Lambda_{\theta}\Lambda_{\theta,j}}^{(S)}$

17. Cálculo de las variables:

a. Multiplicador de Lagrange:

$$\Delta \Lambda_{\theta,j} = (\mathbf{F}_{I,j}^{(\theta)})^{-1} \mathbf{f}_{I,j}^{(\theta)}$$


---

---


$$\mathbf{F}_{I,j}^{(\theta)} = (\mathbf{K}_{\Lambda_\theta \Lambda_\theta} - \sum_{S=1}^{N_S} \mathbf{K}_{\Lambda_\theta}^{(S)} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(S)-1} \mathbf{K}_{\theta\Lambda_\theta}^{(S)})_j$$

$$\mathbf{f}_{I,j}^{(\theta)} = (\mathbf{f}_{\Lambda_\theta} - \sum_{S=1}^{N_S} \mathbf{K}_{\Lambda_\theta}^{(S)} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{(S)-1} \mathbf{f}_{\theta}^{(S)})_j$$

b. Temperatura:

$$\Delta \hat{\theta}_{1,j}^{(S)} = (\mathbf{K}_{\theta\theta,j}^{(S)})^{-1} (\mathbf{f}_{\theta,j}^{(S)} - \mathbf{K}_{\theta\Lambda_\theta,j}^{(S)} \Delta \Lambda_{\theta,j})$$

18. Actualización de las variables: 
$$\begin{cases} \hat{\theta}_{1,j}^{(S)} = \hat{\theta}_1^{(S)} + \Delta \hat{\theta}_{1,j}^{(S)} \\ \Lambda_{\theta,j} = \Lambda_{\theta,0} + \Delta \Lambda_{\theta,j} \end{cases}$$

19. Cálculo de los vectores de fuerzas:  $\mathbf{f}_{\theta,j}^{(S)}, \mathbf{f}_{\Lambda_\theta,j}$

20. Cálculo del vector de fuerzas residuales:  $\mathbf{f}_{\text{Res},j}$

21. Estimación del error:

Si  $\mathbf{f}_{\text{Res},j} < \text{TOL.}$ , *SALIR PASO TÉRMICO*

o Actualización de las variables: 
$$\begin{cases} \theta_1^{(S)} = \theta_{1,j}^{(S)} \\ \Lambda_\theta = \Lambda_{\theta,j} \end{cases}$$

Si no, regresar al paso 15 y hacer  $(j = j + 1)$

22. Hacer  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

<sup>1</sup>  $N_{SP}$  corresponde al total de subdominios con desplazamientos preescritos suficientes, como para suprimir los movimientos de sólido rígido y  $N_{SF}$  al total de subdominios flotantes.

<sup>2</sup> Los superíndices  $(S)$  y  $(f)$  corresponden a los subdominios que pertenecen a  $N_{SP}$  y  $N_{SF}$  respectivamente.

<sup>3</sup> Todas las operaciones que poseen los superíndices  $(S)$  o  $(f)$  requieren un bucle o sobre los  $N_{SP}$  subdominios prescritos o los  $N_{SF}$  subdominios flotantes, según sea el caso.

---

**Observación 4.7** Nótese, que la presencia del término transitorio  $[c\dot{\theta}]$  en la ecuación (4.43), permite invertir la matriz  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$  ya que actúa de forma similar a la matriz de masa en el problema dinámico. Sin embargo, en el caso en el que se desee llevar a cabo simulaciones en donde el calor específico sea nulo, la inversión de la matriz  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$  exigirá la implementación de una estrategia para eliminar los modos singulares de la matriz, como la definida en el apartado 2.5, del tipo:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\theta\theta} = \mathbf{K}_{\theta\theta} + c_{\theta} \tilde{\mathbf{R}}_{\theta}^T \mathbf{R}_{\theta} \quad (4.59)$$

siendo  $c_{\theta} > 0$  el parámetro de penalización.

## 4.2.4 Validación del método

### 4.2.4.1 Aplicación al conformado de un cilindro metálico

Para consultar la eficacia en la transferencia de la variable temperatura a través de la interfaz, se llevó a cabo una simulación típica de un proceso de conformado para casos de elastoplasticidad isotérmica.

El test consiste en la compresión de un cilindro, hasta reducir su altura en un 60%, con la ayuda de una herramienta rígida (Taylor, y otros, 1983). El coeficiente de fricción entre la herramienta y la pieza es  $\mu = 1e + 8$  dando lugar a una condición de no deslizamiento perfecta (Simo, y otros, 1992).

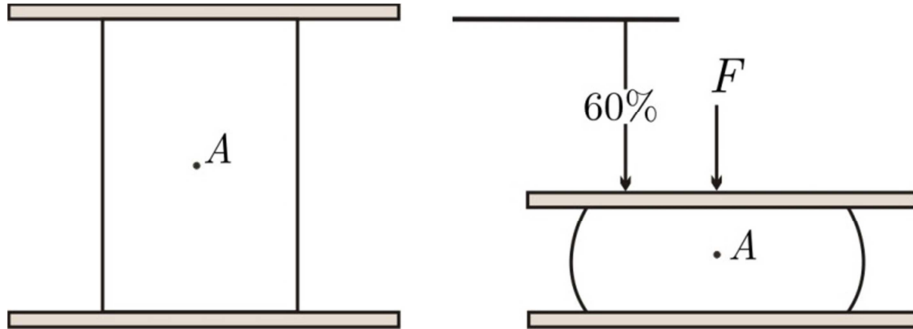


Figura 4.6: Descripción del problema “Upsetting of a billet”.

El ejemplo parte de un cilindro de radio y altura inicial de  $10mm$  y  $30mm$  respectivamente y que se asume aislado térmicamente. Debido a las hipótesis de revolución y a la simetría de la pieza, sólo un cuarto de la misma será considerada en la simulación (Figura 4.7).

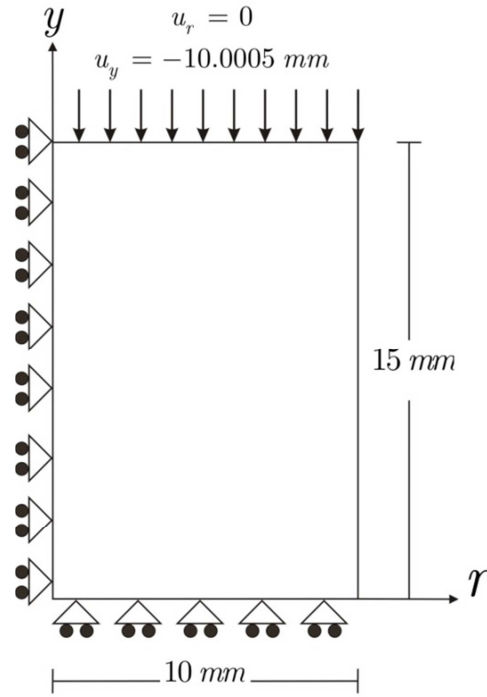


Figura 4.7: Condiciones de contorno de un cuarto de cilindro.

Teniendo en cuenta las propiedades del material mostradas en la Tabla 4.1 y conociendo que la temperatura inicial es  $\theta_0 = 293K$ . La tensión de fluencia utilizada  $\sigma_y(\theta)$  vendrá dada por la siguiente expresión (Simo, y otros, 1992):

$$\sigma_y(\theta) = \sigma_0(\theta) + h(\theta)\alpha \quad (4.60)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \sigma_0(\theta) &= \sigma_0(\theta_0)[1 - w_0(\theta - \theta_0)] \\ h(\theta) &= h(\theta_0)[1 - w_h(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \quad (4.61)$$

Tabla 4.1: Propiedades físicas del material (Simo, y otros, 1992), (Taylor, y otros, 1983).

Módulo de compresibilidad	$\kappa$	$166670 \text{ N/mm}^2$
Módulo de cizallamiento	$\mu$	$76920 \text{ N/mm}^2$
Tensión de fluencia inicial	$\sigma_0$	$700 \text{ N/mm}^2$
Módulo de endurecimiento inicial	$h$	$300 \text{ N/mm}^2$
Densidad	$\rho$	$7.8e - 9 \text{ N s}^2/\text{mm}^4$
Coefficiente de expansión	$\alpha$	$1e - 6 \text{ K}^{-1}$
Conductividad térmica	$k$	$45 \text{ N/sK}$
Calor específico	$c$	$4.6e + 8 \text{ mm/s}^2 \text{ K}$
Factor de disipación	$\chi$	0.9
Tensión de fluencia de ablandamiento	$w_0$	$0.0003 \text{ K}^{-1}$
Ablandamiento-endurecimiento	$w_h$	$0.0003 \text{ K}^{-1}$

Se llevarán a cabo tres simulaciones con las discretizaciones presentadas en la Figura 4.8, con el objetivo de comparar los perfiles de temperatura de una pieza sin particionar, con los de una pieza particionada en 4 y 12 subdominios con mallas triangulares estructuradas no coincidentes. La simulación numérica concluirá al alcanzar el 60% de la deformación en un tiempo total de  $t = 1 \text{ s}$ .

Adicionalmente, y para completar el análisis, se observarán los perfiles de presión al 60% de deformación y se llevará a cabo un estudio de evolución de la fuerza aplicada sobre el punzón superior, hasta conseguir el 66.67% de deformación (Ponthot, 2002).



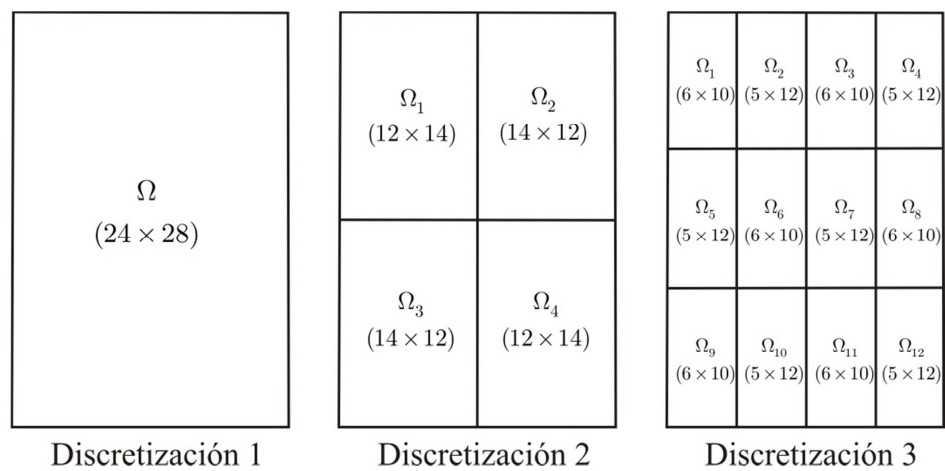


Figura 4.8: Particiones y discretizaciones utilizadas en las simulaciones.

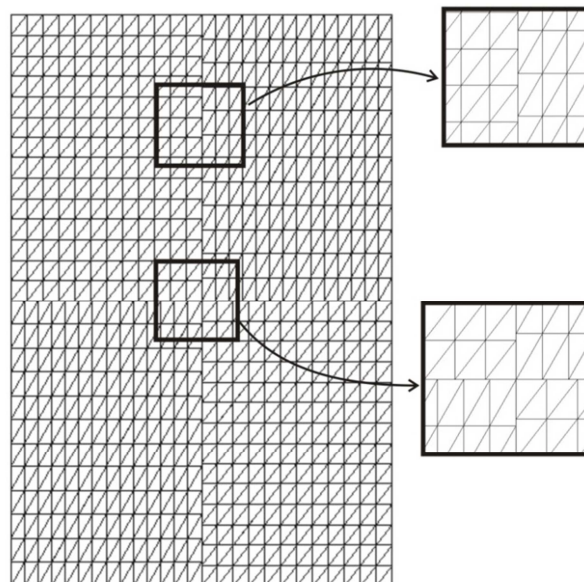


Figura 4.9: Ejemplo de la discretización 2, en el que se observa la no conformidad de la malla.

Resultado en Temperaturas:

En la Figura 4.10 a continuación, se observa la distribución de temperaturas para una pieza sin particionar (Discretización 1), y para las piezas particionadas en 4 y 12 subdominios respectivamente (Discretizaciones

2 y 3). Con el ánimo de comparar de una forma más clara los resultados, en cada uno de los contornos de temperaturas se muestran etiquetas con los resultados en diversas zonas de transición.

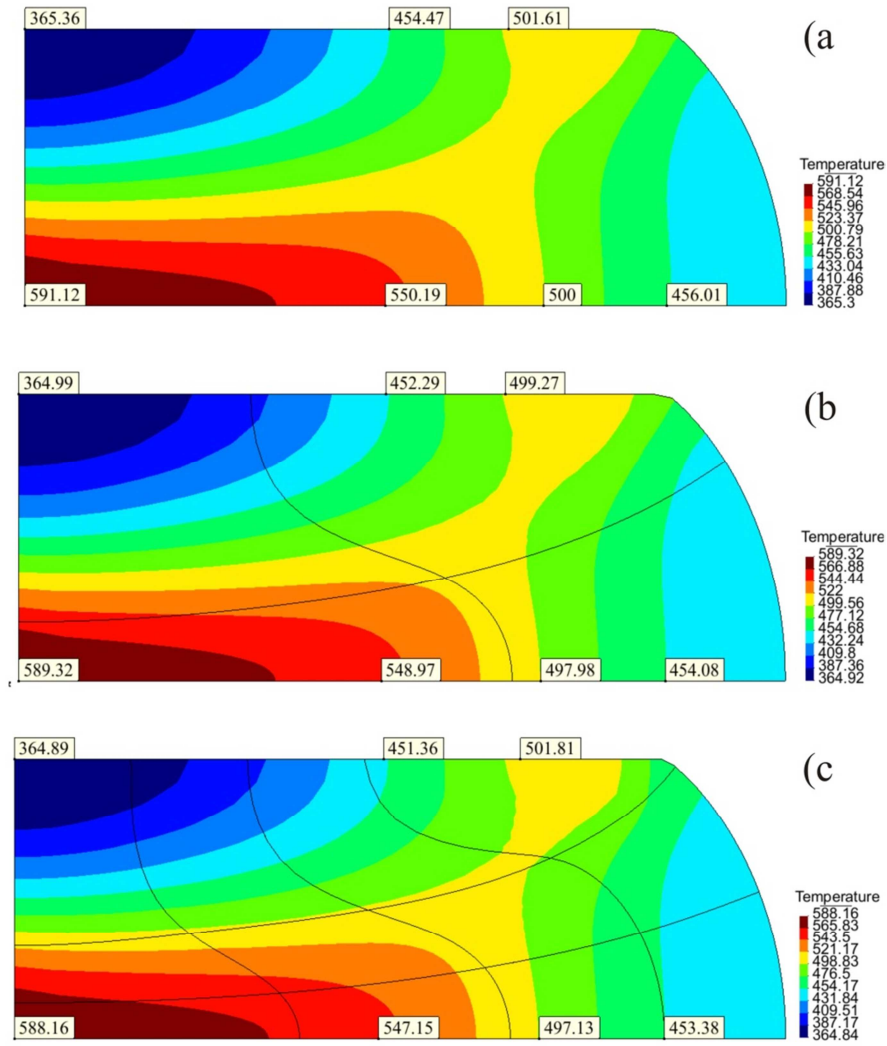


Figura 4.10: Perfiles de temperaturas para: a) Discretización 1, b) Discretización 2, c) Discretización 3.

Una vez realizadas las simulaciones numéricas, se concluye que a partir de las ecuaciones (4.45)-(4.47) se consigue tanto para las discretizaciones 2 y 3, una correcta transferencia de la variable temperatura a través de la interfaz. Observándose que, a pesar de los altos niveles de deformación plástica, el método propuesto consigue responder de forma robusta y precisa.

Resultado en presiones:

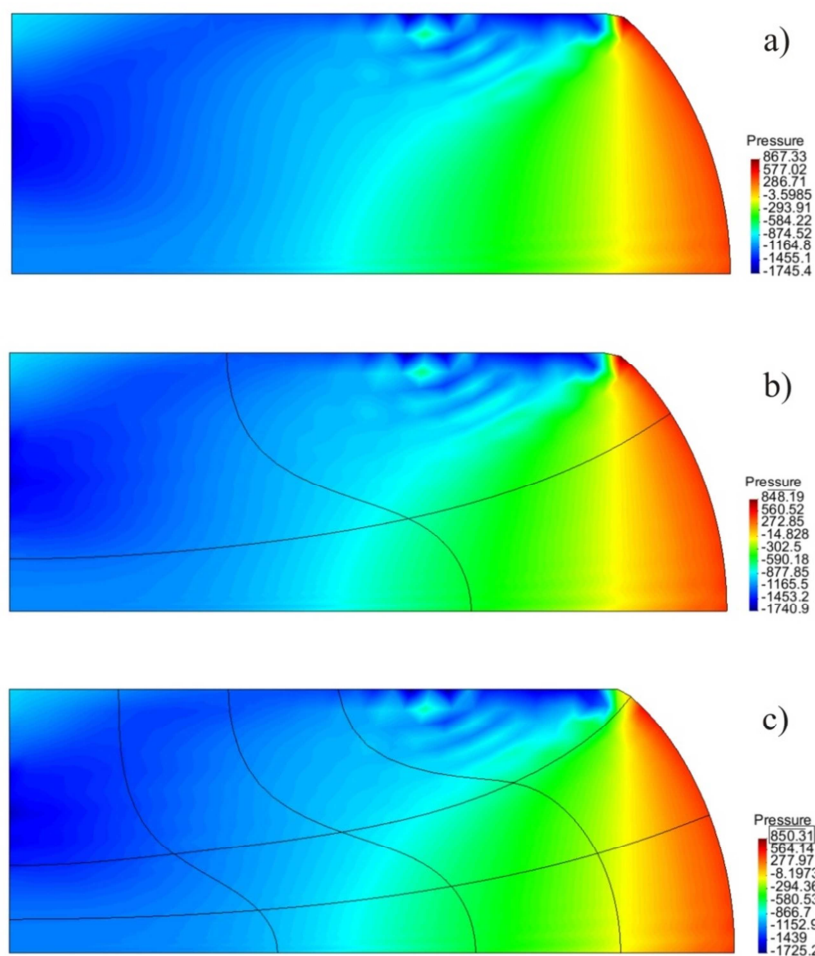


Figura 4.11: Perfiles de presiones para: a) Discretización 1, b) Discretización 2, c) Discretización 3.

Adicionalmente, para consultar el correcto funcionamiento de la formulación mixta, desplazamiento-presión, en la Figura 4.11 se muestran los perfiles de presiones para las 3 discretizaciones, a partir de los cuales se verificó el correcto funcionamiento de la estabilización y de la técnica propuesta.

Para finalizar, se midió la evolución de la fuerza sobre el punzón superior durante todo el proceso de compresión, esta vez hasta conseguir 66.67% de deformación de la pieza. Se comparó la técnica propuesta con simulaciones numéricas alternativas en las que la pieza no ha sido particionada en subdominios (Taylor, y otros, 1983) y (Ponthot, 2002).

### Curva de fuerza en el punzón superior

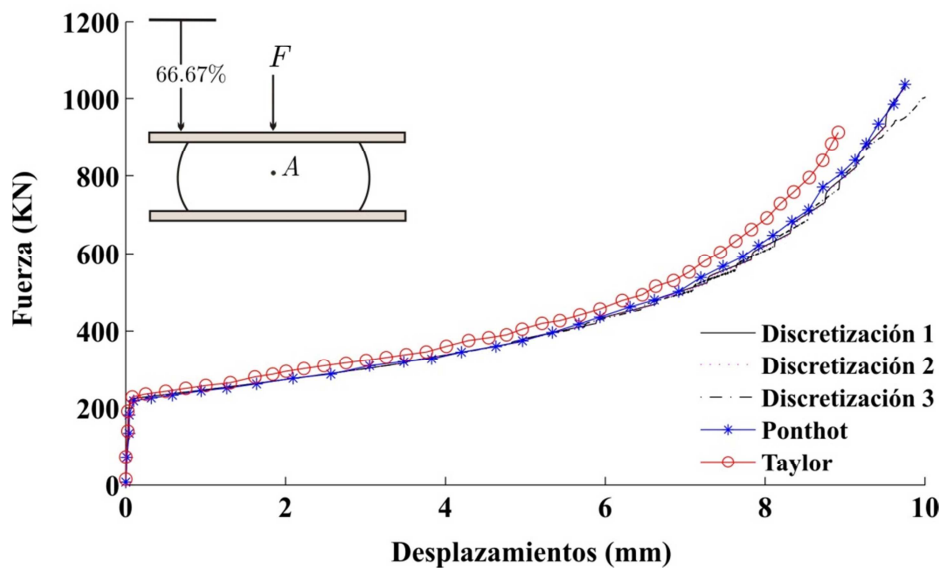


Figura 4.12: Evolución de la fuerza sobre el punzón superior, durante todo el proceso, hasta alcanzar el 66.67% de deformación (Ponthot, 2002).

Las curvas muestran que el método es capaz de reproducir el modelo constitutivo del material de forma correcta, independientemente del número de subdominios y de la conexión entre ellos a partir de mallas no coincidentes (Figura 4.12).

#### 4.2.5 Consideraciones finales

En este capítulo, se comenzó con una breve explicación del modelo termomecánico acoplado, resuelto mediante una estrategia de tipo staggered como una herramienta a ser utilizada por el método de partición de dominios propuesto en este trabajo.

En la segunda parte del capítulo, se introdujeron las modificaciones sobre la técnica de partición de dominios, para poder resolver problemas termomecánicos acoplados. Partiendo de las ecuaciones globales de balance de energía, el principio de los trabajos virtuales, discretización, linealización y resolución mediante el método de las subestructuras.

Del test de validación se pudieron obtener las siguientes conclusiones:

- La técnica propuesta es capaz de llevar a cabo la transferencia de las variables presión y temperatura de una forma robusta y precisa.
- Por medio de comparaciones con métodos termomecánicos alternativos, se pudo verificar la correcta reproducción del modelo constitutivo del material, a través de la curva de fuerza sobre el punzón superior.



## 5 Conclusiones y líneas futuras de investigación

### 5.1 Resumen del método propuesto

El objetivo principal de este trabajo, es el desarrollo de una técnica de partición de dominios precisa y robusta, capaz de abordar problemas termomecánicos acoplados con formulaciones mixtas desplazamiento-presión. La mayoría de las técnicas de partición de dominios existentes, se caracterizan por la generación de un marco de partición entre subdominios, sin embargo, la técnica propuesta en este trabajo se fundamenta en la generación de una malla de interfaz entre subdominios, de espesor nulo entre fronteras, por degeneración de una triangulación de Delaunay, lo cual, le permite al método, conectar subdominios con mallas coincidentes o no coincidentes sin afectar su precisión. Por otra parte, ante la aparición de subdominios flotantes que carecen de restricciones suficientes para evitar los movimientos de sólido rígido, en este trabajo se propone una técnica innovadora de bajo coste computacional y poco invasiva a nivel de implementación.

Al igual que en técnicas alternativas de partición de dominios, la conexión entre subdominios se lleva a cabo mediante la introducción del campo de los multiplicadores de Lagrange, por lo cual, para la resolución de problemas con formulaciones mixtas desplazamiento-presión se incorporó el multiplicador de Lagrange de las presiones ( $\lambda_p$ ) y para abordar problemas termomecánicos acoplados, el multiplicador de Lagrange de la Temperatura ( $\lambda_\theta$ ).

## 5.2 Conclusiones

Las principales conclusiones obtenidas en este trabajo, son las siguientes:

- Se ha desarrollado, implementado y validado una técnica de partición de dominios, con la que se pueden abordar problemas termomecánicos acoplados, con formulaciones mixtas desplazamiento-presión, tanto para el caso de mallas coincidentes, como para el de mallas no coincidentes entre subdominios.
- Se verificó que la generación de la malla de interfaz entre subdominios, le imparte al método versatilidad, precisión, facilidad de implementación y bajo coste a nivel computacional. Adicionalmente, se demostró que en particiones con subdominios en forma de cruz, la interfaz propuesta garantiza una correcta transferencia de información.
- Se verificó y demostró, el correcto funcionamiento de la interfaz de contacto y de las ecuaciones propuestas para la transferencia de las variables: desplazamiento, presión y temperatura, mediante diversos test de validación.
- Se demostró que la estrategia propuesta para el cálculo de la pseudoinversa de la matriz de rigidez de los subdominios flotantes, funciona de forma precisa, sin necesidad de llevar a cabo una implementación altamente invasiva y sin alterar los tiempos de cálculo computacional, garantizando que no se rompa con las características de matriz dispersa que posee intrínsecamente la matriz de rigidez de cada subdominio.
- Se demostró, que la técnica propuesta a diferencia de algunos métodos alternativos, cumple con el patch test de forma satisfactoria, tanto para el caso de mallas coincidentes, como para el caso de mallas no coincidentes y con la presencia de subdominios flotantes.
- Se demostró mediante diversos test de validación, cálculos de error y análisis de convergencia, que los resultados obtenidos mediante la interfaz y ecuaciones propuestas, son comparables a nivel de precisión y velocidad de convergencia, con métodos alternativos que incorporan un marco de partición entre subdominios.
- Se demostró, que la técnica propuesta a nivel de precisión, presenta ventajas notables al ser comparada con el método de mortero de malla



burda. Este efecto, se debe a que las integrales en el método de mortero sólo toman en cuenta una de las dos discretizaciones (en este caso la más burda), mientras que en la técnica propuesta, la malla de interfaz permite llevar a cabo un doble barrido de forma natural sobre las dos superficies que conforman la interfaz.

- En la técnica propuesta para suprimir los movimientos de sólido rígido, se demostró que existe cierta dependencia entre los resultados del método a nivel de precisión y la cantidad de elementos estabilizadores activos en la interfaz, con lo cual, se recomienda tener en cuenta estos resultados a la hora de utilizar la técnica. Sin embargo, a nivel de robustez y tiempos de cálculo esta dependencia es irrelevante.
- En las formulaciones mixtas desplazamiento-presión, las oscilaciones de la presión en la cercanía de incompresibilidades, se estabilizan vía el método PPP, sin embargo, desde un punto de vista conceptual, cualquier otra técnica de estabilización podría ser utilizada sin afectar el método de partición de dominios.
- Mediante el problema de la membrana de Cook, se ha verificado que la convergencia del método no se ve afectada sustancialmente al particionar un dominio en subdominios, tanto para el caso de mallas coincidentes como para el de mallas no coincidentes.
- Mediante el problema de la membrana de Cook, se demuestra que la desactivación del multiplicador de Lagrange de las presiones ( $\lambda_p$ ) no afecta la transferencia de información en desplazamientos ni la velocidad de convergencia del método, sin embargo, se concluye que para poder llevar a cabo correctamente la transferencia de la variable presión entre subdominios, es necesario activar sobre la interfaz, el multiplicador de Lagrange de las presiones sin importar la discretización que se escoja.
- Se verificó, que para llevar a cabo simulaciones con formulaciones mixtas desplazamiento-presión con subdominios flotantes, no hace falta incorporar ninguna componente adicional a la estrategia propuesta para suprimir los movimientos de sólido rígido, con lo cual, el cálculo de la pseudoinversa de la matriz, es exactamente el mismo que para formulaciones irreducibles en desplazamientos.
- Se demostró, mediante el test de conformado de un cilindro, la eficacia de las ecuaciones propuestas para la transferencia de la

variable temperatura a través de la interfaz y de la incorporación del multiplicador de Lagrange de la temperatura ( $\lambda_\theta$ ) dentro de cada una de las parcelas triangulares.

- Se demostró, que incluso en problemas de conformado de metales en donde el material sufre altos niveles de deformación plástica, la técnica propuesta de partición de dominios consigue obtener resultados comparables en robustez y precisión con simulaciones numéricas monolíticas en las cuales no se ha llevado a cabo la partición de dominios.
- Se ha demostrado, que en simulaciones de problemas termomecánicos acoplados, los subdominios sin condiciones de contorno térmicas, no ameritan ninguna estrategia adicional para la inversión de la matriz rigidez  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ , siempre y cuando el término transitorio en el balance de energía no sea nulo.

### 5.3 Aportaciones

- Se ha extendido el “*contact-domain method*” (Oliver, y otros, 2009), al caso de análisis de descomposición de dominios.
- Se ha propuesto, implementado y validado una estrategia para el cálculo de la pseudoinversa de la matriz de rigidez de los subdominios flotantes, *poco invasiva a nivel de implementación* y de bajo coste computacional, garantizando que no se rompa con las características de matriz dispersa que posee intrínsecamente la matriz de rigidez de cada subdominio.
- Se han propuesto, implementado y validado las ecuaciones para llevar a cabo la transferencia de la variable presión a través de la interfaz, con la finalidad de abordar simulaciones numéricas particionadas en subdominios, de problemas incompresibles que ameriten el uso de elementos mixtos desplazamiento-presión.
- Se han propuesto, implementado y validado las ecuaciones para la transferencia de la variable temperatura en simulaciones numéricas de problemas termomecánicos acoplados particionadas en subdominios, en donde el modelo constitutivo del material y la variable temperatura se encuentran constantemente relacionados a lo largo de todo el proceso de conformado del material.

- En las ecuaciones de las restricciones, para la transferencia de la variable presión y de la variable temperatura, se propusieron, implementaron y validaron, los términos adicionales de estabilización de tipo consistente, motivados en ambos casos, por la identificación de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_p$  y  $\lambda_\theta$  en las ecuaciones de Euler Lagrange, definiéndose de forma adecuada los respectivos parámetros de estabilización  $\tau_p$  y  $\tau_\theta$ .

## 5.4 Líneas Futuras de Investigación

Las siguientes líneas futuras de investigación pueden tener como punto de partida, el presente trabajo:

- Utilización del método con estrategias de cálculo paralelo, que incorpore el uso de algoritmos iterativos para la solución de los multiplicadores de Lagrange.
- Extensión de la técnica propuesta a elementos finitos no triangulares.
- Extensión de la técnica propuesta, para la realización de simulaciones numéricas en tres dimensiones (3D).
- Aplicación a problemas de tipo multifísica (fluido-estructura).
- Utilización de la técnica propuesta en simulaciones numéricas con elementos finitos distintos en cada uno de los subdominios.



## Bibliografía

Agelet de Saracibar, C., Cervera, M., & Chiumenti, M. (1999). On the formulation of coupled thermoplastic problems with phase-change. *International Journal of Plasticity*, 1-34.

Agelet de Saracibar, C., Chiumenti, M., Valverde, Q., & Cervera, M. (2006). On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation J2 plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1224-1251.

Atluri, S. N. (1975). On "hybrid" finite-element models in solid mechanics. *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations*, 346-356.

Bäker, M. (2006). Finite element simulation of high-speed cutting forces. *Journal of Materials Processing Technology*, 117-126.

Belytschko, T., Liu W. K. & Moran B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons.

Bernardi, C., Maday, Y., & Patera, A. T. (1993). Domain Decomposition by the Mortar Element Method. *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, 269-286.

Bochev, P., Dohrmann, C., & Gunzburger, M. (2008). Stabilization of low order mixed finite elements for the stokes equations. *Journal on Numerical Analysis*, 82-101.

Bonet, J., & Wood, R. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York: Cambridge University Press.

Chorin, A. J. (1997). A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of computational physics*, 118-125.

Dohrmann, C., & Bochev, P. (2004). A stabilized finite element method for the stokes problem based on polynomial pressure projections . *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , 183-201.

Farhat, C. (1990). Which parallel finite element algorithm for which architecture and which problem. *Engineering computations*, 186-195.

Farhat, C., & Mandel , J. (1998). The two-level FETI method for static and dynamic plate problems - Part I: an optimal iterative solver for biharmonic systems . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129-152.

Farhat, C., & Roux, F. C. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1205-1227.

Farhat, C., Chen, P., Mandel, J., & Roux, F. (1998). The two-level FETI method - Part II: extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 153-180.

Farhat, C., Lesoinne, M., LeTallec, P., Pierson, K., & Rixen, D. (2001). FETI-DP: a dual-primal unified FETI method--Part I: A faster alternative to the two-level FETI method. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 1523-1544.

Farhat, C., Pierson K., & Lesoinne M. (2000). The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 333-374.

Felippa, C. A., Park, K. C., & Justino Filho, M. R. (1998). The construction of free-free flexibility matrices as generalized stiffness inverses. *Computers and Structures*, 411-418.

Fischer, K. A., & Wriggers, P. (2005). Frictionless 2D Contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Comput Mech*, 226-244.

Girault, V., Pencheva, G. V., Wheeler, M. F., & Wildey, T. M. (2009). Domain decomposition for linear elasticity with DG jumps and mortars. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1751-1765.

Hallquist, J., Goudreau, G., & Benson, D. (1985). Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 107-137.

Hartmann, S., Oliver, J., Weyler, R., Cante, J. C., & Hernández, J. A. (2009). A contact domain method for large deformation frictional contact problems. Part 2: Numerical aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2607-2631.

Heintz, P., & Hansbo, P. (2006). Stabilized Lagrange multiplier method for bilateral elastic contact with friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 4323-4333.

Herry, B., Di Valentin, L., & Combescure, A. (2002). An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 973-1003.

Holzappel G.A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons.

Johnson, G. H., & Cook, W. H. (1983). A constitutive model and data for metals subjected to large strains high strain rates and high temperatures. *Proceedings of the 7th symposium on ballistics*.

Lloberas Valls, O. (2013). *Multiscale domain decomposition analysis of quasi-brittle materials*. Delft.

Marsden, J. E., & Hughes, T. J. (1994). *Mathematical Theory of Elasticity*. Mineola, NY: Dover.

Miehe, C. (1994). Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 1981-2004.

Oliver, J., Hartmann, S., Cante, J. C., Weyler, R., & Hernández, J. A. (2009). A contact domain method for large deformation frictional contact problems. Part 1: Theoretical basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2591-2606.

Oñate, E., Rojek, J., Taylor, R. L., & Zienkiewicz, O. C. (2004). Finite calculus formulation for incompressible solids using linear triangles and tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , 1473-1500.

Park, K. C., & Felippa, C. A. (2000). A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for numerical Methods in Engineering*, 395-418.

Park, K. C., Felippa, C. A., & Rebel, G. (2002). A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces . *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 2117-2142.

Park, K., & Felippa, C. (1998). A variational framework for solution method developments in structural mechanics. *Journal of Applied Mechanics* , 242-249.

Ponthot, J. P. (2002). Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes . *International Journal of Plasticity* , 91-126.

Popp, A., Gee, M. W., & Wall, W. A. (2009). A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1354-1391.

Rixen, D. J. (2002). Extended preconditioners for the FETI method applied to constrained problems. *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 1-26.

Rixen, D., & Farhat, C. (1997). *A simple and efficient extension of a class of Substructure-based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems*. Colorado: University of Colorado.

Rodriguez, J. M. (2014). *Numerical modeling of metal cutting processes using the Particle Finite Element Method*. Barcelona: Universidad Polit cnica de Catalu a.

Schwarz, H. A. (1972). *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. *American Mathematical Society*.



- Simo, J. C., & Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- Simo, J. C., & Miehe, C. (1992). Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41-104.
- Simo, J. C., & Rifai, M. S. (1990). A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engrg.* , 1595-1638.
- Simo, J., Wriggers, P., & Taylor, R. (1985). A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 163-180.
- Stefanica, D. (1999). *Domain Decomposition Methods for Mortar Finite Elements*. New York: New York University .
- Taylor, L. M., & Becker, E. B. (1983). Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 251-277.
- Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill.
- Voce, E. (1955). A practical strain hardening function . *Metallurgia*.
- Weyler R., Oliver J., Sain T. & Cante J.C. (2012). On the contact domain method: A comparison of penalty and Lagrange multiplier implementations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 68-82.
- Wholmuth, B. I. (2000). A mortar Finite Element Method using dual spaces for the Lagrange multiplier. *SIAM J. NUMER. ANAL.* 989-1012.
- Yang, B., Laursen, T. A., & Meng, X. (2005). Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1183-1225.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Zhu J. Z. (6<sup>th</sup> Edition). *Finite Element Method- Its Basis and Fundamentals*. Elsevier.

